**UNIVERSITÄT DES SAARLANDES**
**FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK**
Prof. Dr. Ernst Albrecht
Dipl.-Math. Natalie Marx

## Übungen zur Vorlesung Analysis III

Wintersemester 2006/2007

### Blatt 8

**Abgabe:** Donnerstag, 14.12.2006 von 9.00 bis 9.10 Uhr in HS III, Gebäude E2 5 oder bis 9.10 Uhr in den Briefkasten 'Analysis III WS 06/07' in Gebäude E2 5 (Untergeschoss)

---

**Aufgabe 1** **(4+6=10 Punkte)**

Für $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$ definieren wir die *Fouriertransformation* $\hat{f} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ durch

$$\hat{f}(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{-2\pi i < x,y >} f(y) d\lambda_N(y).$$

Hierbei sei $< x, y >= \sum\limits_{j=1}^{N} x_j y_j$ für alle $x = (x_1, \ldots, x_N)$, $y = (y_1, \ldots, y_N) \in \mathbb{R}^N$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\hat{f}$ ist eine gleichmäßig stetige beschränkte Funktion auf $\mathbb{R}^N$.

(b) Berechnen Sie $\hat{\chi}_Q$ für $Q = [a_1, b_1) \times \cdots \times [a_N, b_N)$.

---

**Aufgabe 2** **(3+4+3=10 Punkte)**

(a) Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{C}_\infty(\mathbb{R}^N) := \left\{ f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N) : \lim_{|x| \to \infty} |f(x)| = 0 \right\}$$

ein abgeschlossener Untervektorraum des mit der Supremumsnorm versehenen Banachraumes $C_b(\mathbb{R}^N)$ aller stetigen und beschränkten Funktionen auf $\mathbb{R}^N$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass es zu jeder Funktion $f$ aus $C_c(\mathbb{R}^N)$ und jedem $\varepsilon > 0$ eine Funktion $g$ der Form

$$\sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{Q_j}$$

mit paarweise disjunkten $Q_j$ gibt mit $\|f - g\|_1 < \varepsilon$.

(c) Zeigen Sie, dass für alle $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ gilt

$$\hat{f} \in \mathcal{C}_\infty(\mathbb{R}^N).$$

---

**Aufgabe 3** **(4+6=10 Punkte)**

Durch

$$\Phi : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \qquad \Phi(r, \theta, z) := \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ z \end{pmatrix}$$

werden die sogenannten *Zylinderkoordinaten* definiert.

**Bitte wenden!**

(a) Zeigen Sie, dass $\Phi$ ein $C^1$-Diffeomorphismus auf sein Bild ist und berechnen Sie die Jacobi-Determinante.

(b) Berechnen Sie

$$\int_K x^2 d(x,y,z),$$

wobei $K := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \sin(x^2+y^2) \text{ und } x^2+y^2 \leq \pi\right\}$.

---

**Aufgabe 4** **(5+5=10 Punkte)**

Berechnen Sie die folgenden Integrale

(a) $\displaystyle\int_M (x^2y - y^3x)\, d\lambda(x,y)$ mit $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$.

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ existiert das Integral

$$\int_M \left(x^2+y^2+z^2\right)^\alpha \, d\lambda(x,y,z)$$

mit $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}$ $(R > 0)$ ?

---

**Aufgabe 5*** **(4+4=8 Punkte)**

Für $\varphi, \psi \in C_c(\mathbb{R}^N)$ definieren wir die *Faltung* $\varphi * \psi$ von $\varphi$ und $\psi$ durch

$$(\varphi * \psi)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x-y)\psi(y) d\lambda_N(y).$$

Zeigen Sie

(a) $\varphi * \psi = \psi * \varphi$.

(b) $\operatorname{supp}(\varphi * \psi) \subseteq \operatorname{supp}\varphi + \operatorname{supp}\psi$.

---

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

`www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ws06_07/ana3/ana3.html`