UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht
Dipl.-Math. Natalie Marx

Übungen zur Vorlesung Analysis III

Wintersemester 2006/2007

Blatt 9

Abgabe: Donnerstag, 21.12.2006 von 9.00 bis 9.10 Uhr in HS III, Gebäude E2 5 oder bis 9.10 Uhr in den Briefkasten 'Analysis III WS 06/07' in Gebäude E2 5 (Untergeschoss)

Aufgabe 1 **(6+6=12 Punkte)**

(a) Bestimmen Sie das Volumen von

$$K = \left\{(x,y,z) \in [0,\pi] \times \mathbb{R}^2 : y^2 + z^2 \leq \sin^2 x\right\}.$$

(b) Im $\mathbb{R}^3$ wird durch die (x,y)-Ebene, den Zylinder $x^2 + y^2 \leq 4$ und die Fläche $z = e^{x^2+y^2}$ eine beschränkte Menge K begrenzt. Berechnen Sie das Integral der Funktion

$$(x,y,z) \mapsto y^2$$

über K.

Aufgabe 2 **(10 Punkte)**

Wie groß ist für $a \neq 0$ der Flächeninhalt des oberhalb des Kreises $x^2 + y^2 = ax$ liegenden Teils der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$?

Aufgabe 3 **(4+4+4=12 Punkte)**

Seien $f, g \in C_c(\mathbb{R}^N)$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen (Bezeichnungen siehe Blatt 8 Aufgabe 1 und 5):

(a) $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$.

(b) Für $f \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ gilt

$$\widehat{(D_\nu f)}(\xi) = 2\pi i \xi_\nu \hat{f}(\xi).$$

(c) Die Funktionen $\hat{f}g$ und $\hat{g}f$ sind integrierbar und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^N} \hat{f}(x)g(x)d\lambda_N x = \int_{\mathbb{R}^N} f(y)\hat{g}(y)d\lambda_N y.$$

Aufgabe 4 **(6 Punkte)**

Zeigen Sie, dass für jedes beschränkte Intervall I gilt

$$L^p(I) \subset L^1(I).$$

Gilt dies auch für unbeschränkte Intervalle?

Bitte wenden!

Aufgabe 5* **(4 Punkte)**

Berechnen Sie das Integral

$$\int\limits_M y e^{x+z} d\lambda(x, y, z)$$

mit $M = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1 \text{ und } |z| \leq 2\big\}$.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

`www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ws06_07/ana3/ana3.html`