UNIVERSIT"AT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 - MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht

Funktionentheorie 2 (WS 2007/08)
Blatt 3

Im folgenden sei $V := [0,\infty)^N$ (versehen mit der von $\mathbb{R}^N$ induzierten Relativtopologie) und $\tau : \mathbb{C}^N \to V$ die Abbildung

$$z \mapsto (|z_1|, \ldots, |z_N|) \qquad (z = (z_1, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^N).$$

Aufgabe 1. Zeigen Sie:

(a) Eine offene Menge $\Omega \subseteq \mathbb{C}^N$ ist genau dann ein Reinhardt-Körper, wenn $\Omega = \tau^{-1}(W)$ für eine (relativ) offene Teilmenge von V^N.
(b) Ist $\Omega \subseteq \mathbb{C}^N$ ein Reinhardt-Körper, so ist $\tau(\Omega)$ eine (relativ) offene Teilmenge von V.

Aufgabe 2. Zeigen Sie:

(a) Jeder nicht leere, vollkommene Reinhardt-Körper ist eigentlich.
(b) Ist $(\Omega_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine Familie von vollkommenen, logarithmisch konvexen Reinhardt-Körpern in $\mathbb{C}^N$, so ist auch $\Omega_0 := \operatorname{int} \bigcap_{\alpha \in A} \Omega_\alpha$ wieder ein vollkommener, logarithmisch konvexer Reinhardt-Körper. Insbesondere gibt es also zu jeder offenen Teilmenge Ω des $\mathbb{C}^N$ genau einen kleinsten die Menge Ω enthaltenden vollkommenen, logarithmisch konvexen Reinhardt-Körper.

Aufgabe* 3. Berechnen Sie für $0 < \varepsilon < 1 \leq \alpha$ den kleinsten vollkommenen, logarithmisch konvexen Reinhardt-Körper Ω_0 in $\mathbb{C}^2$, der die Menge

$$\Omega_{\varepsilon,\alpha} := \{(z, w) \in \Delta(0, 1)\, ;\, \min\{|z|, \alpha|w|\} < \varepsilon\}.$$

enthält. Skizzieren Sie $\tau(\Omega_{\varepsilon,\alpha}), \tau(\Omega_0)$ und $\log(\tau(\Omega_{\varepsilon,\alpha})), \log(\tau(\Omega_0))$ im Fall $\alpha = 2 = \varepsilon^{-1}$.

Abgabetermin: Montag, 12.11.2007 vor der Vorlesung.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter
`http://www.math.uni-sb.de/~ag/albrecht/ws07_08/ft2/ft2-ueb.html`