



Funktionentheorie 2 (WS 2007/08)
Blatt 4

Sind $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{C}^N$ offen, so heißt eine Abbildung $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ *biholomorph*, falls f bijektiv und f und die Umkehrabbildung $f^{-1} : \Omega_2 \rightarrow \Omega_1$ als $\mathbb{C}^N$ -wertige Funktionen holomorph sind. Mit $\mathbb{B}_N$ bezeichnen wir die euklidische Einheitskugel in $\mathbb{C}^N$ und mit $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}$ das Standardskalarprodukt in $\mathbb{C}^N$.

Für $0 \neq a \in \mathbb{C}^N$ ist $P_a : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$ mit

$$P_a(z) := \frac{\langle z, a \rangle}{|a|^2} a \text{ für alle } z \in \mathbb{C}^N$$

die orthogonale Projektion von $\mathbb{C}^N$ auf den eindimensionalen von a erzeugten Untervektorraum $\text{LH}(a)$. Die hierzu orthogonale Projektion $\text{id}_{\mathbb{C}^N} - P_a$ auf $\text{LH}(a)^\perp$ bezeichnen wir mit Q_a .

Für $0 \neq a \in \mathbb{B}_N$ und alle $z \in \mathbb{C}^N$ mit $\langle z, a \rangle \neq 1$ definieren wir

$$\phi_a(z) := \frac{a - P_a(z) - \sqrt{1 - |a|^2} Q_a(z)}{1 - \langle z, a \rangle}$$

und für $a = 0$ sei $\phi_0(z) := -z$ für alle $z \in \mathbb{C}^N$.

Aufgabe 1. Sei $U \in M_{N \times N}(\mathbb{C})$ eine unitäre Matrix und sei a ein Punkt in $\mathbb{B}_N$. Zeigen Sie:

- (a) Die durch $z \mapsto Uz$, $z \in \mathbb{B}_N$, definierte Abbildung ist biholomorph von $\mathbb{B}_N$ auf sich.
- (b) Für alle $a \in \mathbb{B}_N$ ist ϕ_a auf einer Umgebung von $\overline{\mathbb{B}_N}$ holomorph und erfüllt $\phi_a(a) = 0$.
- (c) Für alle $z, a \in \mathbb{B}_N$ gilt $\phi_a(Uz) = U\phi_{U^*a}(z)$.

Aufgabe 2. Zeigen Sie für alle $a, z \in \mathbb{B}_N$:

- (a) $1 - |\phi_a(z)|^2 = \frac{(1 - |a|^2)(1 - |z|^2)}{|1 - \langle z, a \rangle|^2}$.
- (b) ϕ_a bildet $\mathbb{B}_N$ biholomorph auf sich ab. (Hinweis: Berechnen Sie $\phi_a \circ \phi_a$.)

Aufgabe* 3. Wir definieren $G_N := \{U \circ \phi_a ; a \in \mathbb{B}_N, U : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N \text{ unitär}\}$. Zeigen Sie:

- (a) G_N ist bezüglich der Hintereinanderausführung $\circ$ eine Gruppe.
- (b) G_N operiert transitiv auf $\mathbb{B}_N$, d.h. zu je zwei Punkten $u, v \in \mathbb{B}_N$ gibt es ein $\phi \in G_N$ mit $\phi(u) = v$.

Abgabetermin: Montag, 19.11.2007 vor der Vorlesung.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter
http://www.math.uni-sb.de/~ag/albrecht/ws07_08/ft2/ft2-ueb.html