



Funktionentheorie 2 (WS 2007/08)
Blatt 10

Auf diesem Übungsblatt sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}^N$ eine offene Menge und $f = (f_1, \dots, f_N) \in \mathcal{O}(\Omega, \mathbb{C}^N)$ eine holomorphe Abbildung von Ω nach \mathbb{C}^N . Wir definieren

$$\frac{\partial f}{\partial z} : \Omega \rightarrow M_{N \times N}(\mathbb{C})$$

durch

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z) := \left(\frac{\partial f_j}{\partial z_k}(z) \right)_{j,k=1,\dots,N}, \quad (z \in \Omega).$$

$\frac{\partial f}{\partial z}(z)$ heißt die *holomorphe Funktionalmatrix* oder *Jacobi-Matrix* von f im Punkt $z \in \Omega$.

Wir schreiben $\mathbf{J}_f^{\mathbb{C}}(z) := \det \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)(z)$ für die zugehörige komplexe Jacobi-Determinante. Für die reelle Jacobi-Determinante von f , betrachtet als Abbildung von Ω als offene Teilmenge von \mathbb{R}^{2N} in den \mathbb{R}^{2N} , schreiben wir $\mathbf{J}_f^{\mathbb{R}}(z)$ für alle $z = (x_1, y_1, \dots, x_N, y_N) \in \Omega$.

Aufgabe 1. Zeigen Sie:

- (a) Ist auch $\Omega_1 \subseteq \mathbb{C}^N$ offen mit $f(\Omega) \subseteq \Omega_1$ und ist $g \in \mathcal{O}(\Omega_1, \mathbb{C}^N)$, so gilt für alle $a \in \Omega$:

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial z}(a) = \frac{\partial g}{\partial z}(f(a)) \frac{\partial f}{\partial z}(a).$$

- (b) Es gilt $\partial f_1 \wedge \dots \wedge \partial f_N = \det \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) dz_1 \wedge \dots \wedge dz_N$ auf Ω .

Aufgabe 2. Zeigen Sie $\mathbf{J}_f^{\mathbb{R}}(z) = |\mathbf{J}_f^{\mathbb{C}}(z)|^2$ für alle $z \in \Omega$.

Aufgabe* 3. Beweisen Sie die folgende Fassung des Riemannsches Abbildungssatzes mit Hilfe des aus der Funktionentheorie einer Veränderlichen bekannten klassischen Riemannsches Abbildungssatzes:

Ist $G = G_1 \times \dots \times G_N$ ein Produkt von einfach zusammenhängenden Gebieten in \mathbb{C} , so gibt es ein $k \in \{0, 1, \dots, N\}$ so, daß G biholomorph äquivalent ist zu $\mathbb{D}^k \times \mathbb{C}^{N-k}$.

Abgabetermin: Montag, 14.01.2008 vor der Vorlesung.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter
http://www.math.uni-sb.de/~ag/albrecht/ws07_08/ft2/ft2-ueb.html