UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 - MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht

Funktionentheorie 2 (WS 2007/08)
Blatt 10

Auf diesem Übungsblatt sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}^N$ eine offene Menge und $f = (f_1, \ldots, f_N) \in \mathcal{O}(\Omega, \mathbb{C}^N)$ eine holomorphe Abbildung von Ω nach $\mathbb{C}^N$. Wir definieren

$$\frac{\partial f}{\partial z} : \Omega \to M_{N\times N}(\mathbb{C})$$

durch

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z) := \left(\frac{\partial f_j}{\partial z_k}(z)\right)_{j,k=1,\ldots,N}, \qquad (z \in \Omega).$$

$\frac{\partial f}{\partial z}(z)$ heißt die *holomorphe Funktionalmatrix oder Jacobi–Matrix* von f im Punkt $z \in \Omega$.

Wir schreiben $\mathbf{J}_f^{\mathbb{C}}(z) := \det\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)(z)$ für die zugehörige komplexe Jacobi-Determinante. Für die reelle Jacobi–Determinante von f, betrachtet als Abbildung von Ω als offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{2N}$ in den $\mathbb{R}^{2N}$, schreiben wir $\mathbf{J}_f^{\mathbb{R}}(z)$ für alle $z = (x_1, y_1, \ldots, x_N, y_N) \in \Omega$.

Aufgabe 1. Zeigen Sie:

(a) Ist auch $\Omega_1 \subseteq \mathbb{C}^N$ offen mit $f(\Omega) \subseteq \Omega_1$ und ist $g \in \mathcal{O}(\Omega_1, \mathbb{C}^N)$, so gilt für alle $a \in \Omega$:

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial z}(a) = \frac{\partial g}{\partial z}(f(a))\frac{\partial f}{\partial z}(a)\,.$$

(b) Es gilt $\partial f_1 \wedge \ldots \wedge f_N = \det\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_N$ auf Ω.

Aufgabe 2. Zeigen Sie $\mathbf{J}_f^{\mathbb{R}}(z) = |\mathbf{J}_f^{\mathbb{C}}(z)|^2$ für alle $z \in \Omega$.

Aufgabe* 3. Beweisen Sie die folgende Fassung des Riemannschen Abbildungssatzes mit Hilfe des aus der Funktionentheorie einer Veränderlichen bekannten klassischen Riemannschen Abbildungssatzes:

Ist $G = G_1 \times \ldots \times G_N$ ein Produkt von einfach zusammenhängenden Gebieten in $\mathbb{C}$, so gibt es ein $k \in \{0, 1, \ldots, N\}$ so, daß G biholomorph äquivalent ist zu $\mathbb{D}^k \times \mathbb{C}^{N-k}$.

Abgabetermin: Montag, 14.01.2008 vor der Vorlesung.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter
`http://www.math.uni-sb.de/~ag/albrecht/ws07_08/ft2/ft2-ueb.html`