UNIVERSIT"AT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 - MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht

Funktionentheorie 2 (WS 2007/08)
Blatt 11

Auf diesem Übungsblatt sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ eine offene Menge. Eine Funktion $f : \Omega \to [-\infty, \infty)$ heißt *von oben halbstetig*, falls für alle $t \in \mathbb{R}$ die Menge $f^{-1}([-\infty, t)$ offen in Ω ist. Die Menge der auf Ω von oben halbstetigen Funktionen bezeichnen wir mit $USC(\Omega)$.

Aufgabe 1. Sei $f \in USC(\Omega)$. Zeigen Sie:

(a) $\forall w \in \Omega \qquad \limsup_{z \to w} f(z) \leq f(w)$.
(b) Ist $K \subseteq \Omega$ eine kompakte Menge, so ist $\sup_{z \in K} f(z) < \infty$.
(c) Genau dann ist eine reellwertige Funktion g auf Ω stetig, wenn $-g, g \in USC(\Omega)$ gilt.

Für welche Teilmengen M von Ω ist die charakteristische Funktion χ_M von oben halbstetig?

Aufgabe 2. Sei $f \in USC(\Omega)$ nach oben beschränkt und $f \not\equiv -\infty$. Wir definieren Funktionen $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, durch

$$f_n(z) := \sup_{\zeta \in \Omega} f(\zeta) - n|\zeta - z| \,.$$

Zeigen Sie:

(a) $f_n \in C(\Omega)$.
(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$, $z \in \Omega$ gilt $f(z) \leq f_{n+1}(z) \leq f_n(z)$.

Aufgabe* 3. Zeigen Sie, daß es zu jeder nach oben beschränkten Funktion $f \in USC(\Omega)$ eine fallende Folge von auf Ω stetigen reellwertigen Funktionen gibt, die auf Ω punktweise gegen f konvergiert.

Abgabetermin: Montag, 21.01.2008 vor der Vorlesung.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter
http://www.math.uni-sb.de/~ag/albrecht/ws07_08/ft2/ft2-ueb.html