UNIVERSIT"AT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 - MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht

Funktionentheorie 2 (WS 2007/08)
Blatt 12

Auf diesem Aufgabenblatt sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen.

Aufgabe 1. Sei $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ eine auf Ω harmonische, reellwertige Funktion und sei G eine beliebige einfach zusammenhängende offene Teilmenge von Ω. Zeigen Sie:

(a) Die Funktion $2\frac{\partial u}{\partial z}$ besitzt auf G eine komplexe Stammfunktion $f \in \mathcal{O}(G)$.
(b) Für die Funktion f aus (a) gilt: $d\,\mathrm{Re}\, f \equiv du$ auf G.

Aufgabe 2. Zeigen Sie: Jede auf Ω harmonische Funktion $h \in C^2(\Omega, \mathbb{C})$ besitzt in Ω die Mittelwerteigenschaft, d.h. Für jedes $z \in \Omega$ und jedes $r > 0$ mit $\overline{U_r(z)} \subset \Omega$ gilt

$$h(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(z + re^{i\varphi})\, d\varphi.$$

Insbesondere gilt also (nach Funktionentheorie 1) für harmonische Funktionen die lokale und die globale Form des Maximumprinzips.

Eine Funktion $u : \Omega \to [-\infty, \infty)$ heißt *subharmonisch* auf Ω, falls u auf Ω von oben halbstetig ist und falls für jede kompakte Menge $K \subset \Omega$ und jede auf $\mathrm{int}\, K$ harmonische Funktion $h \in C(K, \mathbb{R}) \cap C^2(\mathrm{int}\, K, \mathbb{R})$ mit $u \leq h$ auf ∂K schon $u \leq h$ auf ganz K gilt.

Aufgabe* 3. Zeigen Sie:

(a) Ist u auf Ω subharmonisch, so auch cu für alle $c > 0$.
(b) Ist $(u_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine Familie von auf Ω subharmonischen Funktionen, ist

$$u(z) := \sup_{\alpha \in A} u_\alpha(z) < \infty \qquad \text{für alle } z \in \Omega$$

und ist u auf Ω von oben halbstetig, so ist auch u subharmonisch.

Abgabetermin: Montag, 28.01.2008 vor der Vorlesung.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter
`http://www.math.uni-sb.de/~ag/albrecht/ws07_08/ft2/ft2-ueb.html`