UNIVERSIT"AT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 - MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht

Funktionentheorie 2 (WS 2007/08)
Blatt 13

Auf diesem Aufgabenblatt sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen.

Aufgabe 1. Sei $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ eine punktweise monoton fallende Folge subharmonischer Funktionen auf einer offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Zeigen Sie, daß dann auch die durch

$$u(z) := \lim_{n\to\infty} u_n(z) \qquad (z \in \Omega)$$

definierte Funktion $u : \Omega \to [-\infty, \infty)$ auf Ω subharmonisch ist.

Der Poissonkern $P : \mathbb{D} \times \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$P(z,\zeta) := \operatorname{Re}\left(\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\right) \qquad (|z| < 1 = |\zeta|).$$

Sei $D := D(w,\rho)$ die offene Kreisscheibe um $w \in \mathbb{C}$ mit Radius $\rho > 0$. Für eine Lebesgue–integrierbare Funktion $\phi : \partial D \to \mathbb{R}$ definieren wir $P_D\phi : D \to \mathbb{R}$ durch

$$P_D\phi(z) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P\big((z-w)/\rho, e^{i\theta}\big)\phi(w+\rho e^{i\theta})\,d\theta \qquad (z \in D).$$

Aufgabe 2. Zeigen Sie:

(a) $(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} P(z,e^{i\theta})\,d\theta = 1$ für alle $z \in \mathbb{D}$.
(b) Für alle $\zeta_0 \in \partial\mathbb{D}$, $\delta > 0$, gilt in $\mathbb{D}$

$$\lim_{z\to\zeta_0} \sup_{\zeta\in\partial\mathbb{D}, |\zeta-\zeta_0|\geq\delta} P(z,\zeta) = 0\,.$$

Aufgabe* 3. Zeigen Sie, daß mit den obigen Bezeichnungen und Voraussetzungen gilt:

(a) $P_D\phi$ ist auf D harmonisch.
(b) Ist ϕ in einem Punkt $\zeta_0 \in \partial D$ stetig, so gilt

$$\lim_{z\to\zeta_0} P_D\phi(z) = \phi(\zeta_0).$$

Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst, daß es genügt, die beiden Aussagen im Fall $w = 0$ und $\rho = 1$ zu zeigen.

Abgabetermin: Montag, 04.02.2008 vor der Vorlesung.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter
`http://www.math.uni-sb.de/~ag/albrecht/ws07_08/ft2/ft2-ueb.html`