UNIVERSIT"AT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 - MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht

Funktionentheorie 2 (WS 2007/08)
Blatt 14

Aufgabe 1. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}^N$ offen. Zeigen Sie mit Hilfe des aus der reellen Analysis bekannten Satzes über die Umkehrfunktionen die folgende Variante dieses Satzes für holomorphe Funktionen:

Für eine Abbildung $f \in \mathcal{O}(\Omega, \mathbb{C}^N)$ und einen Punkt $a \in \Omega$ sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

(a) Es gibt Umgebungen U von a und V von $f(a)$, so dass $f : U \to V$ biholomorph ist.

(b) $\det \dfrac{\partial f}{\partial z}(a) \neq 0$.

Aufgabe 2. Seien $\Omega_1 \subseteq \mathbb{C}^N$ und $\Omega_2 \subseteq \mathbb{C}^M$ offen und sei $f \in \mathcal{O}(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathbb{C}^M)$. Zeigen Sie unter Verwendeung von Aufgabe 1 die folgende (holomorphe) Fassung des Satzes über implizite Funktionen:

Ist $(z_0, w_0) \in \Omega_1 \times \Omega_2$ mit $f(z_0, w_0) = 0$ und gilt

$$\det \frac{\partial f}{\partial w}(z_0, w_0) \neq 0,$$

so gibt es Umgebungen $U \subseteq \Omega_1$ von z_0 und $W \subseteq \Omega_2$ von w_0 und eine holomorphe Abbildung $\varphi : U \to V$ mit $f(z, \varphi(z)) \equiv 0$ auf Ω_1 und so, dass für alle $(z, w) \in U \times W$ mit $f(z, w) = 0$ gilt $w = \varphi(z)$.

Aufgabe* 3. Sei $\varphi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ definiert durch

$$\varphi(z) := (z_1, z_1 z_2 + z_3, z_1 z_2^2 - z_2 + 2 z_2 z_3) \qquad (z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3).$$

(a) Berechnen Sie die komplexe Jacobi-Determinante

$$\det \frac{\partial \varphi}{\partial z}(z) \qquad (z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3).$$

(b) Sei $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ und sei

$$G_\varepsilon := \Delta(0, (1 + \varepsilon, 1 + \varepsilon, \varepsilon))$$

der Polyzylinder um 0 mit dem Polyradius $(1 + \varepsilon, 1 + \varepsilon, \varepsilon)$. Zeigen Sie, dass $\varphi(G_\varepsilon)$ offen ist.

Abgabetermin: Montag, 11.02.2008 vor der Vorlesung.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter
`http://www.math.uni-sb.de/~ag/albrecht/ws07_08/ft2/ft2-ueb.html`