UNIVERSIT"AT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 - MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht

Funktionentheorie 2 (WS 2007/08)
Blatt 5

Ein Polynom p in N komplexen Veränderlichen heißt *homogen* vom Grad $n \in \mathbb{N}_0$, falls $p(\lambda z) = \lambda^n p(z)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}^n$.

Aufgabe 1. Zeigen Sie:

(a) Zu jeder in einer Umgebung Ω von 0 holomorphen Funktion f in N komplexen Veränderlichen gibt es eine eindeutig bestimmte Folge $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ von homogenen Polynomen f_n vom Grad n, so dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ in einer Umgebung $U \subseteq \Omega$ von 0 normal konvergiert. Man nennt dies die *homogene* Entwicklung von f um 0.
(b) Ist f und $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ wie in (a) und $A : \mathbb{C}^M \to \mathbb{C}^N$ eine komplex lineare Abbildung, so ist $f \circ A$ in einer Umgebung von $0 \in \mathbb{C}^M$ holomorph und hat die homogene Entwicklung $\sum_{n=0}^{\infty} f_n \circ A$.
(c) Ist $f \in \mathcal{O}(\mathbb{B}_N)$, so ist für alle $\zeta \in \partial\mathbb{B}_N$ die durch $f_\zeta : \lambda \mapsto f_\zeta(\lambda) := f(\lambda\zeta)$ definierte Funktion auf der Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$ in $\mathbb{C}$ holomorph. Geben Sie die Potenzreihendarstellung von f_ζ mit Hilfe der homogenen Entwicklung von f an.

Aufgabe 2. Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{B}_N)$ mit der homogenen Entwicklung $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$. Zeigen Sie:

(a) Für alle $s \in \mathbb{C}$ ist die Reihe

$$(\mathcal{R}^s f)(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^s f_n(z)$$

normal in $\mathbb{B}^N$ konvergent.
(b) Ist $\zeta \in \partial\mathbb{B}_N$ und f_ζ wie in der vorhergehenden Aufgabe, so gilt für alle $\lambda \in \mathbb{D}$:

$$(\mathcal{R}f)(\lambda\zeta) = \lambda f_\zeta'(\lambda).$$

Statt $\mathcal{R}^1$ schreiben wir auch $\mathcal{R}$.

Aufgabe* 3. Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{B}_N)$. Zeigen Sie:

(a) $(\mathcal{R}f)(z) = \sum_{k=1}^{N} z_k \frac{\partial f}{\partial z_k}(z)$ für alle $z \in \mathbb{B}_N$.
(b) Für alle Mulitiindizes $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ gilt:

$$\partial^\alpha \mathcal{R} f - \mathcal{R}\partial^\alpha f = |\alpha| \partial^\alpha f.$$

Abgabetermin: Montag, 26.11.2007 vor der Vorlesung.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter
`http://www.math.uni-sb.de/~ag/albrecht/ws07_08/ft2/ft2-ueb.html`