UNIVERSIT"AT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 - MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht

Funktionentheorie 2 (WS 2007/08)
Blatt 8

Aufgabe 1. Sei $A \subset \mathbb{C}^N$ abgeschlossen. Zwei auf offenen Obermengen U_f, U_g von A definierte holomorphe Funktionen $f : U_f \to \mathbb{C}$, $g : U_g \to \mathbb{C}$ heißen *äquivalent* ($f \sim g$), falls es eine offene Menge V mit $A \subset V \subseteq U_f \cap U_g$ gibt, so dass $f \equiv g$ auf V gilt.

(a) Zeigen Sie, dass "$\sim$" eine Äquivalenzrelation ist. Mit $\mathcal{O}(A)$ bezeichnen wir die Menge der Äquivalenzklassen von auf (individuellen) Obermengen von A holomorphen Funktionen. Für eine auf einer offenen Obermenge U_f von A holomorphe Funktion $f : U_f \to \mathbb{C}$ sei

$$[f]_A := \{g \in \mathcal{O}(U_g)\,; U_g \text{ offen mit } A \subset U_g, g \equiv f \text{ auf einer offenen Menge } V \text{ mit } A \subset V \subseteq U_f \cap U_g\}$$

die Äquivalenzklasse von f bezüglich $\sim$.

(b) Seien $[f]_A, [g]_A \in \mathcal{O}(A)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Sind $f : U_f \to \mathbb{C}$, $g : U_g \to \mathbb{C}$ Elemente von $[f]_A$, bzw. von $[g]_A$, so seien $[f]_A + [g]_A$, bzw. $[f]_A \cdot [g]_A$ bzw. $\lambda[f]_A$ die Äquivalenzklassen der durch $h_+(z) := f(z) + g(z)$ bzw. $h_*(z) := f(z)g(z)$ bzw. $h(z) := \lambda f(z)$ definierten Funktionen $h_+, h_* : U_f \cap U_g \to \mathbb{C}$, $h : U_f \to \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass die hierdurch definierten Operationen der Addition, der Multiplikation und der Multiplikation mit Skalaren wohldefiniert sind und dass $\mathcal{O}(K)$ versehen mit diesen Operationen eine $\mathbb{C}$-Algebra ist.

Ist $A = \{z\}$ für einen Punkt $z \in \mathbb{C}^N$, so schreiben wir $\mathcal{O}_z$ statt $\mathcal{O}(\{z\})$ und $[f]_z$ statt $[f]_{\{z\}}$.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass $\mathcal{O}_z$ ein Integritätsbereich ist.

Aufgabe* 3. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}^N$ offen und beschränkt, $w \in \Omega$ und sei $f \in C(\overline{\Omega} \setminus \{w\})$ mit

$$|f(z)| = O(|z - w|^{1-2N}) \text{ für } z \to w.$$

Zeigen Sie, dass f auf Ω integrierbar ist.

Abgabetermin: Montag, 18.12.2007 vor der Vorlesung.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter
`http://www.math.uni-sb.de/~ag/albrecht/ws07_08/ft2/ft2-ueb.html`