Beweis des Satzes von Hartogs über Folgen subharmonischer Funktionen

Satz von Hartogs. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ eine auf jeder kompakten Teilmenge von Ω gleichmäßig nach oben beschränkte Folge von auf Ω subharmonischen Funktionen mit*

$$\forall z \in \Omega : \qquad \limsup_{n\to\infty} f_n(z) \leq C$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$. Dann gibt es zu jeder kompakten Teilmenge K von Ω und jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \geq n_0 \quad \forall z \in K : \qquad f_n(z) < C + \varepsilon.$$

Beweis. Sei also K eine beliebige kompakte Teilmenge von Ω und sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es eine offene Menge $\Omega_1 \subset \Omega$ mit kompaktem Abschluß und mit $K \subset \Omega_1 \subset \overline{\Omega_1} \subset \Omega$. Nach Voraussetzung ist

$$M := \sup_{z \in \overline{\Omega_1}} < \infty.$$

Die Funktionen $g_n := f_n - M$ sind ebenfalls subharmonisch und erfüllen $g_n \leq 0$ auf Ω_1. Sei nun $R > 0$ mit

$$K \subset \Omega_{1,3R} := \{z \in \Omega_1 \,;\, \operatorname{dist}(z, \mathbb{C} \setminus \Omega_1) > 3R\}.$$

Nach Satz 7.5 der Vorlesung folgt für alle $z \in K, n \in \mathbb{N}$:

$$\pi R^2 g_n(z) \leq \int_{D(z,R)} g_n(w)\, dw\,.$$

Nach dem Lemma von Fatou gilt für alle $z \in K$:

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{D(z,R)} g_n(w)\, dw \leq \int_{D(z,R)} \limsup_{n\to\infty} g_n(w)\, dw \leq C\pi R^2.$$

Insbesondere gibt es zu jedem $z \in K$ ein $k(z) \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \geq k(z) : \qquad \int_{D(z,R)} g_n(w)\, dw \leq \pi\big(C - M + \frac{\varepsilon}{2}\big)R^2.$$

Sei $z \in K$ beliebig. Für alle $\delta \in (0, R)$ und alle $\zeta \in D(z, \delta)$ folgt wegen $g_n \leq 0$ auf Ω_1 nach Satz 7.5 für alle $n \geq k(z)$:

$$\begin{aligned}\pi(R+\delta)^2 g_n(\zeta) &\leq \int_{D(\zeta,R+\delta)} g_n(w)\, dw \leq \int_{D(z,R)} g_n(w)\, dw \\ &\leq \pi\big(C - M + \frac{\varepsilon}{2}\big)R^2.\end{aligned}$$

Wählen wir also $\delta > 0$ so klein, daß

$$\frac{\big(C - M + \frac{\varepsilon}{2}\big)R^2}{(R+\delta)^2} < C - M + \varepsilon,$$

so folgt für alle $\zeta \in D(z, \delta)$ und alle $n \geq k(z)$:

$$f_n(\zeta) < C + \varepsilon\,.$$

Wegen der Kompaktheit von K gibt es endlich viele $z_1, \ldots, z_m \in K$ mit

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{m} D(z_k, \delta).$$

Für alle $n \geq n_0 := \max\{k(z_1), \ldots, k(z_m)\}$ und alle $\zeta \in K$ folgt nun $f_n(\zeta) < C + \varepsilon$ und damit die Behauptung. $\square$