UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht
Dipl.-Math. Natalie Didas

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis I

Wintersemester 2008/2009

Blatt 1

Abgabe: Dienstag, 28.10.2008, vor der Vorlesung

Eine auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definierte reellwertige Funktion heißt bekanntlich *konvex*, falls für alle $x, y \in I$ und alle $\alpha \in [0,1]$ gilt:

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)\,.$$

Die Funktion f heißt *strikt konvex*, falls für alle $x, y \in I$ und alle $\alpha \in (0,1)$ gilt:

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) < \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)\,.$$

Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt *konkav* (bzw. *strikt konkav*), falls die Funktion $-f$ konvex (bzw. strikt konvex) ist.

Aufgabe 1 **(10 Punkte)**
Zeigen Sie: Ist $f \in C^2(I)$ mit $f''(x) \geq 0$ (bzw. $f''(x) > 0$) für alle $x \in I$, so ist f konvex (bzw. strikt konvex).

Aufgabe 2 **(5+5=10 Punkte)**
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für alle $x_1, \ldots, x_n \in I$ und alle $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in [0,1]$ mit $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$ gilt die *Jensensche Ungleichung*:

$$f\big(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\big) \leq \alpha_1 f\big(x_1\big) + \cdots + \alpha_n f\big(x_n\big)\,. \tag{1}$$

(b) Ist f strikt konvex und sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_n > 0$ mit $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$, so gilt in (1) genau dann das Gleichheitszeichen, wenn $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ ist.

Aufgabe 3 **(5+5=10 Punkte)**
Sei $p > 1, p' := \frac{p}{p-1}$ und $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in (0,\infty)^n$. Zeigen Sie, dass für alle $(a_1, \ldots, a_n)$, $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$) gilt:

(a) $$\left|\sum_{j=1}^n a_j b_j \omega_j\right| \leq \sum_{j=1}^n |a_j b_j|\, \omega_j \leq \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p\, \omega_j\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^n |b_j|^{p'}\, \omega_j\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Bitte wenden!

(b) $\left(\sum_{j=1}^{n} |a_j + b_j|^p \omega_j\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p \,\omega_j\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{n} |b_j|^p \,\omega_j\right)^{\frac{1}{p}}.$

Wann gilt in diesen beiden Ungleichungen das Gleichheitszeichen?

(Hinweis: Man beachte für (a), dass die Funktion $x \mapsto x^{p'}$ strikt konvex und für (b), dass die Funktion $x \mapsto (1 + x^{1/p})^p$ strikt konkav auf $(0, \infty)$ ist.)

Aufgabe 4 **(10 Punkte)**

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige konvexe Funktion und $g \in C([a,b])$ mit $g([a,b]) \subset I$ und $b - a = 1$. Zeigen Sie:

$$f\left(\int_a^b g(x)dx\right) \leq \int_a^b f(g(x))dx\,.$$

Aufgabe 5* **(10 Punkte)**

Seien $x_1, \ldots, x_n \in [0, \infty)$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n > 0$ mit $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$. Beweisen Sie die Ungleichung für die gewichteten arithmetischen und geometrischen Mittel:

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \geq x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

Zeigen Sie, dass das Gleichheitszeichen hierbei genau dann gilt, wenn $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ ist.

Allgemeine Informationen

- Punkte aus *-Aufgaben tragen nicht zur maximal erreichbaren Punktzahl bei, werden jedoch, wenn Sie eine solche bearbeiten, wie Punkte aus normalen Aufgaben gewertet. Auf diesem Blatt sind also 40 Punkte = 100%, aber Sie können 50 Punkte erreichen.

- Um für diese Veranstaltung einen Leistungsnachweis zu erwerben, müssen folgende Voraussetzungen erfüllt sein:
  (i) erfolgreiche Teilnahme am Übungsbetrieb, d.h

  - durchgehende Anwesenheit in den Übungsgruppen; es besteht also Anwesenheitspflicht (außer in begründeten Ausnahmefällen),
  - ernsthafte Bearbeitung von mindestens 75 % der Übungsaufgaben,
  - mindestens 50 % der möglichen Übungspunkte,
  - aktive Mitarbeit in den Übungsgruppen; d.h. Vorstellung der von Ihnen erarbeiteten Lösungen,

  und (ii) Bestehen einer Klausur.
  Das Bestehen einer Klausur alleine - ohne erfolgreiche Teilnahme an den Übungen - berechtigt **nicht** zum Erwerb eines Leistungsnachweises! Je nach Teilnehmerzahl wird es eine mündliche Prüfung statt einer Klausur geben.

- Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

  `www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ws08_09/fa1/uebungen.html`