UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht
Dipl.-Math. Natalie Didas

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis I

Wintersemester 2008/2009

Blatt 2

Abgabe: Dienstag, 04.11.2008, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 **(3+3+3=9 Punkte)**

Seien $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ zwei normierte $\mathbb{K}$-Vektorräume. Zeigen Sie die folgenden Aussagen, wobei $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ die in der Vorlesung eingeführte Operatornorm bezeichne.

(a) $(\mathcal{L}(E,F), \|\cdot\|)$ ist ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum.

(b) Ist $(F, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, so auch $(\mathcal{L}(E,F), \|\cdot\|)$.

(c) Ist $(G, \|\cdot\|_G)$ ein weiterer normierter Raum, so gilt für alle $T \in \mathcal{L}(E,F), S \in \mathcal{L}(F,G)$: Es ist $ST := S \circ T \in \mathcal{L}(E,G)$ und $\|ST\|_{\mathcal{L}(E,G)} \leq \|S\|_{\mathcal{L}(F,G)}\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}$.

Aufgabe 2 **(4x3=12 Punkte)**

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. Mit $c(X)$ sei die Menge aller Cauchy-Folgen in X bezeichnet, mit $c_0(X)$ die aller Nullfolgen in X.

(a) Zeigen Sie, dass $c(X)$ ein normierter Raum ist bezüglich der sup-Norm und dass $c_0(X)$ ein abgeschlossener Untervektorraum davon ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Quotientennorm auf $\widehat{X} := c(X)/c_0(X)$ gegeben ist durch $\|(x_n)_n + c_0(X)\|_Q = \limsup\limits_{n\to\infty} \|x_n\|$.

(c) Zeigen Sie, dass $(\widehat{X}, \|\cdot\|_Q)$ vollständig ist.

(d) Betten Sie X isometrisch in $\widehat{X}$ ein und zeigen Sie, dass X durch diese Einbettung dichter Teilraum von $\widehat{X}$ ist.

Aufgabe 3 **(3+4+3+3=13 Punkte)**

Sei $\mathbb{D}$ die offene Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$. Der *Hardy-Raum* $H^2(\mathbb{D})$ ist definiert als

$$H^2(\mathbb{D}) := \left\{ f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}) \,|\, \|f\|_{H^2(\mathbb{D})} := \sup_{0\leq r<1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}.$$

Zeigen Sie:

(a) Mit $\|f\|_{H^2(\mathbb{D})} := \sup\limits_{0\leq r<1} \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 \, dt}$ ist eine Norm auf $H^2(\mathbb{D})$ gegeben.

Bitte wenden!

(b) Ist $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine Funktion in $\mathcal{O}(\mathbb{D})$, dann ist $f \in H^2(\mathbb{D})$ genau dann, wenn $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 < \infty$ ist, und in diesem Fall ist $\|f\|_{H^2(\mathbb{D})}^2 = \sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|^2$.
(Hinweis: Cauchy-Produkt von Reihen.)

(c) Folgern Sie aus (b) die Vollständigkeit von $(H^2(\mathbb{D}), \|\cdot\|_{H^2(\mathbb{D})})$.

(d) Zu jedem $z_0 \in \mathbb{D}$ existiert ein $C(z_0) > 0$, so dass $|f(z_0)| \leq C(z_0)\|f\|_{H^2(\mathbb{D})}$ für alle $f \in H^2(\mathbb{D})$.

Aufgabe 4+5* **(3+3+5*=6+5* Punkte)**

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei für $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ die *totale Variation* $V(f)$ definiert durch

$$V(f) = \sup_Z \sum_{\nu=1}^{n} |f(t_\nu) - f(t_{\nu-1})|;$$

hierbei durchläuft Z alle Zerlegungen $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, $n \in \mathbb{N}$, des Intervalls $[a, b]$. Sei

$$BV[a, b] = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \mid V(f) < \infty\}$$

die Menge der *Funktionen von beschränkter Variation* auf $[a, b]$. Auf $BV[a, b]$ werde $\|\cdot\|_{BV}$ definiert durch

$$\|f\|_{BV} = |f(a)| + V(f) \qquad (f \in BV[a, b]).$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $(BV[a, b], \|\cdot\|_{BV})$ ist ein normierter Vektorraum.

(b) Für $f \in BV[a, b]$ ist $\|f\|_\infty := \sup_{t\in[a,b]} |f(t)| < \infty$ und $\|f\|_\infty \leq \|f\|_{BV}$.

(c)* $(BV[a, b], \|\cdot\|_{BV})$ ist vollständig, $(BV[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ hingegen nicht.
(Hinweis: Benutzen Sie, dass $\{f : [a, b] \to \mathbb{R} \mid \|f\|_\infty < \infty\}$ versehen mit $\|\cdot\|_\infty$ ein vollständiger normierter Raum ist.)

Informationen zur Übung

- Die Übung zur Vorlesung findet donnerstags von 12 bis 14 Uhr in SR 3 statt und startet diese Woche (30.10.2008).
- Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

`www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ws08_09/fa1/uebungen.html`