UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht
Dipl.-Math. Natalie Didas

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis I

Wintersemester 2008/2009

Blatt 3

Abgabe: Dienstag, 11.11.2008, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 **(5+5=10 Punkte)**

(a) Sei $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$, für den die Parallelogrammgleichung

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

für alle $x, y \in \mathcal{H}$ gilt. Zeigen Sie, dass durch

$$\langle x, y\rangle := \begin{cases} \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) & \text{falls } \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right) & \text{falls } \mathbb{K} = \mathbb{C} \end{cases}$$

ein Skalarprodukt auf $\mathcal{H}$ definiert wird mit $\|\cdot\| = \langle\cdot,\cdot\rangle^{\frac{1}{2}}$.

(b) Sei $(\mathcal{H}, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Prä-Hilbertraum und seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen aus der Einheitskugel von $\mathcal{H}$ mit der Eigenschaft $\langle x_n, y_n\rangle \to 1$ für $n \to \infty$. Zeigen Sie, dass dann $\|x_n - y_n\| \to 0$ für $n \to \infty$.

Aufgabe 2 **(10 Punkte)**

Zeigen Sie, dass der in der Vorlesung in Beispiel 1.4 (c) eingeführte Raum $\ell^p(I)$ vollständig ist.

Aufgabe 3 **(10 Punkte)**

Sei $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Banachräumen. Zeigen Sie, dass

$$E = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in E_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\| < \infty \right\}$$

ein Banachraum ist bzgl. der Norm

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\| = \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|.$$

Aufgabe 4 **(6+4=10 Punkte)**

(a) Sei E ein Banachraum und F ein endlichdimensionaler Unterraum. Zeigen Sie, dass es zu jedem $x \in E \setminus F$ ein $y \in F$ gibt mit $\|x-y\| = \inf\{\|x-u\|,\ u \in F\}$. Man nennt y die *Bestapproximation* zu x.

Bitte wenden!

(b) Bestimmen Sie alle Bestapproximationen zu $(0,1)$ aus $F := \{(z,0),\, z \in \mathbb{C}\}$ in $\mathbb{C}^2$ versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$.

Ein metrischer Raum E heißt *separabel*, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt, d.h. falls es eine abzählbare Teilmenge A von E gibt, so dass jedes Element von E Grenzwert einer Folge von Elementen aus A ist.

Aufgabe 5* **(6 Punkte)**
Zeigen Sie, dass ein normierter Raum E genau dann separabel ist, wenn es eine abzählbare Menge A gibt, so dass E gleich dem Abschluss der linearen Hülle von A ist.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

`www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ws08_09/fa1/uebungen.html`