



Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis I  
Wintersemester 2008/2009

Blatt 4

Abgabe: Dienstag, 18.11.2008, vor der Vorlesung

---

Aufgabe 1

(5+5=10 Punkte)

Betrachten Sie zu  $\lambda \in \mathbb{R}$  die Funktion

$$f_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f_\lambda(x) := e^{i\lambda x}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass auf  $X := \text{LH } \{f_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}$  durch

$$\langle f, g \rangle := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(x) \overline{g(x)} dx$$

ein Skalarprodukt gegeben ist.

- (b) Zeigen Sie, dass  $X$  nicht separabel ist.  
(Hinweis: Betrachten Sie  $f_\lambda, f_\mu$  mit  $\lambda \neq \mu$ .)
- 

Aufgabe 2

(5+5=10 Punkte)

Sei  $G \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet und sei  $1 \leq p < \infty$ . Der *Bergman-Raum*  $A^p(G)$  sei der Raum aller auf  $G$  holomorphen Funktionen  $f$  auf  $G$ , für die gilt

$$\|f\|_p := \left( \int_G |f(z)|^p d\lambda(z) \right)^{1/p} < \infty.$$

Hierbei sei  $\lambda$  das ebene Lebesguemaß.

- (a) Mit  $\delta(z) := \inf\{|z - w|, w \notin G\} \in (0, \infty]$  für alle  $z \in G$  gilt für  $f \in A^p(G), z \in G$  und  $0 < R < \delta(z)$

$$(i) \quad f(z) = \frac{1}{\pi R^2} \int_{|z-\zeta| < R} f(\zeta) d\lambda(\zeta),$$

$$(ii) \quad |f(z)| \leq \frac{1}{(\pi \delta(z)^2)^{1/p}} \|f\|_{A^p(G)}.$$

- (b) Zeigen Sie, dass  $(A^p(G), \|\cdot\|_p)$  ein Banachraum ist.
- 

Bitte wenden!

**Aufgabe 3****(4+3+3=10 Punkte)**

Auf dem Raum  $\ell^2(\mathbb{N}_0)$  der komplexwertigen, quadratsummierbaren Folgen versehen mit dem Skalarprodukt  $\langle (x_n), (y_n) \rangle_{\ell^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \overline{y_n}$  betrachte man den Operator

$$S : \ell^2(\mathbb{N}_0) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{N}_0), \quad (x_0, x_1, x_2, \dots) \mapsto (0, x_0, x_1, \dots),$$

den sog. *Rechtsshift*.

- (a) Zeigen Sie, dass  $S$  eine Isometrie ist. Ist  $S$  (links-, rechts-)invertierbar, und wenn ja, wie sieht die (Links-, Rechts-)Inverse aus?
  - (b) Zeigen Sie, dass Bild  $S$  abgeschlossen ist und Kodimension 1 in  $\ell^2(\mathbb{N}_0)$  hat.
  - (c) Existiert der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle S^n x, y \rangle$  für alle  $x, y \in \ell^2(\mathbb{N}_0)$ ?
- 

**Aufgabe 4****(10 Punkte)**

Sei  $\mathcal{H}$  ein unendlichdimensionaler Hilbertraum. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

- (i)  $\mathcal{H}$  hat die Hilbertraumdimension  $\aleph_0$ .
  - (ii)  $\mathcal{H}$  ist separabel.
- 

**Aufgabe 5\*****(5 Punkte)**

Bestimmen Sie Orthonormalbasen von  $A^2(\mathbb{D})$ .

---

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

[www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ws08\\_09/fa1/uebungen.html](http://www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ws08_09/fa1/uebungen.html)