UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht
Dipl.-Math. Natalie Didas

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis I

Wintersemester 2008/2009

Blatt 5

Abgabe: Dienstag, 25.11.2008, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 **(3+4+6=13 Punkte)**

Sei G eine Menge und sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ ein Hilbertraum von $\mathbb{C}$-wertigen Funktionen auf G. Eine Abbildung $K : G \times G \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt *reproduzierender Kern von* H, wenn gilt

(i) die Abbildung $K_y : G \longrightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto K(x, y)$ ist ein Element von H für alle $y \in G$.

(ii) $f(y) = \langle f, K_y \rangle_H$ für alle $f \in H$ und alle $y \in G$.

Zeigen Sie:

(a) Ist K ein reproduzierender Kern von H, so gilt:

$$|f(y)| \leq \|f\|_H \sqrt{K(y,y)} \quad \text{für alle } y \in G,\ f \in H.$$

(b) Es gibt genau dann einen reproduzierenden Kern K von H, wenn für alle $x \in G$ die Abbildung $\delta_x : H \longrightarrow \mathbb{C}$, $f \mapsto f(x)$ stetig ist.

(c) Vermöge $\langle f, g \rangle := \int_{B_r(0)} f(z)\overline{g(z)}\, dz$ wird der Bergmann-Raum $A^2(B_r(0))$ zu einem Hilbertraum (siehe Aufgabe 2 von Blatt 4). Zeigen Sie, dass

$$K : B_r(0) \times B_r(0) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (\zeta, z) \mapsto \frac{r^2}{\pi(r^2 - \bar{z}\zeta)^2}$$

ein reproduzierender Kern von $A^2(B_r(0))$ ist.

Aufgabe 2 **(3+5=8 Punkte)**

Sei $\mathcal{H}$ ein reeller Hilbertraum und sei $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ eine surjektive nicht notwendig lineare Abbildung mit $T(0) = 0$ und $\|Tx - Ty\| = \|x - y\|$ für alle $x, y \in \mathcal{H}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$ für alle $x, y \in \mathcal{H}$.

(b) Ist $(e_i)_{i \in I}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$, so ist auch $(Te_i)_{i \in I}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$.

Bitte wenden!

Aufgabe 3 **(10 Punkte)**
Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und P und Q Orthogonalprojektionen auf $\mathcal{H}$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) $P - Q$ ist Orthogonalprojektion

(ii) $\|Px\| \geq \|Qx\|$ für alle $x \in \mathcal{H}$

(iii) Bild $Q \subset$ Bild P

(iv) $PQ = Q$

(v) $QP = Q$.

Aufgabe 4 **(3+6=9 Punkte)**
Für $f \in L^2([0,1])$ und $x \in [0,1]$ definieren wir

$$(Vf)(x) := \int_0^x f(t)dt.$$

(a) Zeigen Sie, dass die oben definierte Abbildung V linear und stetig von $L^2([0,1])$ in sich ist.

(b) Berechnen Sie den zu V adjungierten Operator.

Aufgabe 5* **(6 Punkte)**
Sei $S \in \mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{N}_0))$ der Rechtsshift aus Aufgabe 3 von Blatt 4. Berechnen Sie den zu S adjungierten Operator S^* sowie die Operatoren S^*S und SS^*.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

`www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ws08_09/fa1/uebungen.html`