UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht
Dipl.-Math. Natalie Didas

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis I

Wintersemester 2008/2009

Blatt 6

Abgabe: Dienstag, 02.12.2008, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 **(12 Punkte)**

Zeigen Sie, dass es stetige Funktionen auf $[0,1]$ gibt, die an keiner Stelle differenzierbar sind.
(Hinweis: Betrachten Sie $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ mit

$$E_n := \left\{ f \in C[0,1] : \sup_{0<|h|\leq 1/n} \left| \frac{f(t+h)-f(t)}{h} \right| > n \text{ für alle } t \in [0,1] \right\} \Bigg).$$

Aufgabe 2 **(12 Punkte)**

Wir betrachten eine Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ numerischer Quadraturformeln auf dem Intervall $[a,b]$,

$$S_n : C[a,b] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i^{(n)} f(x_i^{(n)}).$$

Hierbei seien die $x_i^{(n)}$ paarweise verschiedene Punkte im Intervall $[a,b]$, die sog. *Stützstellen*, mit $a \leq x_1^{(n)} < \cdots < x_n^{(n)} \leq b$, und die *Gewichte* $a_i^{(n)}$ komplexe Zahlen. Beweisen Sie den folgenden *Satz von Szegö*: Genau dann gilt für alle $f \in C[a,b]$

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f) = \int_a^b f(x)\,dx, \tag{1}$$

wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) Es gibt eine dichte Teilmenge P von $C[a,b]$, so dass (1) für alle Funktionen aus P gilt.

(ii) $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \sum\limits_{i=0}^{n} |a_i^{(n)}| < \infty$.

(Hinweis: Zeigen Sie, dass S_n stetig und linear ist und berechnen Sie $\|S_n\|$.)

Aufgabe 3 **(5+5=10 Punkte)**

Die Bezeichnungen seien wie in Aufgabe 2.

(a) Sei nun $a_i^{(n)} > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq i \leq n$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f) = \int_a^b f(x)dx \tag{2}$$

genau dann für alle $f \in C[a,b]$ gilt, wenn (2) für alle Polynome gilt.

Bitte wenden!

(b) Bei der *summierten Trapezregel* verwendet man die Stützstellen $x_i^{(n)} := a + i\frac{b-a}{n}$, $i = 0, \ldots, n$ und

$$S_n(f) := \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i^{(n)})\right).$$

Zeigen Sie, dass (2) für alle $f \in C[a,b]$ erfüllt ist.

Aufgabe 4 **(6 Punkte)**

Kann im Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit (Satz 4.4) auf die Vollständigkeit des Raumes E verzichtet werden? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5* **(6 Punkte)**

Zeigen Sie, dass es keine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von abgeschlossenen Mengen in $\mathbb{R}$ gibt mit

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

`www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ws08_09/fa1/uebungen.html`