UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht
Dipl.-Math. Natalie Didas

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis I

Wintersemester 2008/2009

Blatt 7

Abgabe: Dienstag, 09.12.2008, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 **(5x2=10 Punkte)**

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Eine abgeschlossene Teilmenge eines metrischen Raumes (X, d) ist genau dann nirgends dicht, wenn ihr Komplement dicht in (X, d) ist.

(b) Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes (X, d) ist niemals dicht in (X, d), wenn sie von erster Kategorie in (X, d) ist.

(c) Die Vereinigung abzählbar vieler Mengen erster Kategorie ist wieder von erster Kategorie.

(d) Das Komplement einer Menge erster Kategorie in einem vollständigen metrischen Raum ist von zweiter Kategorie.

(e) Das Komplement einer dichten Menge in einem vollständigen metrischen Raum ist von erster Kategorie.

Aufgabe 2 **(10 Punkte)**

Seien E und F Banachräume und $T \in \mathcal{L}(E, F)$ injektiv. Zeigen Sie, dass T^{-1} als Operator von $\operatorname{ran}(T)$ nach E genau dann stetig ist, wenn $\operatorname{ran}(T)$ abgeschlossen ist.

Aufgabe 3 **(10 Punkte)**

Beweisen Sie Lemma 5.15 (b) der Vorlesung: Seien $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ zwei normierte Räume und sei $S \in \mathcal{L}(E, F)$. Ist $T : E \supseteq D(T) \to F$ ein linearer Operator, so ist $S + T$ genau dann abschließbar, wenn T abschließbar ist. Es ist dann $\overline{S + T} = S + \overline{T}$.

Aufgabe 4 **(10 Punkte)**

Geben Sie ein Beispiel eines stetigen linearen Operators S und eines abgeschlossenen linearen Operators T, so dass ST nicht abgeschlossen ist.

Aufgabe 5* **(4 Punkte)**

Seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zwei Normen auf dem Vektorraum X, die beide X zu einem Banachraum machen. Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ äquivalente Normen sind, wenn für ein $C > 0$ gilt $\|x\|_1 \leq C\|x\|_2$ für alle $x \in X$.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

`www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ws08_09/fa1/uebungen.html`