



Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis I
Wintersemester 2008/2009

Blatt 8

Abgabe: Dienstag, 16.12.2008, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Seien E und F zwei Banachräume und sei $T : E \rightarrow F$ ein stetiger linearer Operator, so dass $\dim F/T(E) =: N < \infty$ gilt, d. h. so dass das Bild von T von endlicher Kodimension in F ist. Zeigen Sie, dass in diesem Fall das Bild von T abgeschlossen ist.

(Hinweis: Man beachte, dass $T(E)$ einen *algebraischen* Komplementärraum der Dimension N besitzt.)

Aufgabe 2 (9 Punkte)

Seien E, F Banachräume und sei T ein surjektiver Operator in $\mathcal{L}(E, F)$. Zeigen Sie, dass eine Konstante $c > 0$ existiert, so dass für jedes $y \in F$ ein $x \in E$ existiert mit $Tx = y$ und $\|x\| \leq c\|y\|$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Die Vektorräume $C[0, 1]$ und $C^1[0, 1]$ seien beide mit der sup-Norm versehen. Zeigen Sie, dass der Operator

$$A : C^1[0, 1] \rightarrow C[0, 1], \quad f \mapsto f'$$

abgeschlossenen Graphen hat und unstetig ist. Ist das ein Widerspruch zum Satz vom abgeschlossenen Graphen?

Aufgabe 4 (5+6=11 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass in jedem normierten Raum X gilt:

$$\|x\| = \sup\{|\varphi(x)|; \varphi \in X', \|\varphi\| \leq 1\}.$$

(b) Ist X ein normierter Raum und U ein Untervektorraum, so sind äquivalent:

(i) U liegt dicht in X .

(ii) Falls $\varphi \in X'$ und $\varphi|_U = 0$, so gilt $\varphi = 0$.

Aufgabe 5* (8 Punkte)

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ eine lineare Abbildung mit der Eigenschaft, dass

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$$

für alle $x, y \in \mathcal{H}$ gilt. Zeigen Sie, dass T stetig und folglich selbstadjungiert ist.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter