**UNIVERSITÄT DES SAARLANDES**
**FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK**
Prof. Dr. Ernst Albrecht
Dipl.-Math. Natalie Didas

# Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis I

Wintersemester 2008/2009

## Blatt 9

**Abgabe:** Dienstag, 06.01.2009, vor der Vorlesung

---

**Aufgabe 1** **(6+6=12 Punkte)**

Sei $X$ ein Banachraum und $M$ ein Unterraum von $X$. Der *Annihilator* $M^\perp$ von $M$ ist definiert als

$$M^\perp := \{\varphi \in X' \,;\, \varphi(x) = 0 \text{ für alle } x \in M\} \subset X'.$$

Sei nun $M$ ein abgeschlossener Unterraum von $X$. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung

$$s : M' \to X'/M^\perp, \qquad s(\psi) := \varphi + M^\perp,$$

mit einer Hahn-Banach Fortsetzung $\varphi$ von $\psi$ auf $X$, ist ein isometrischer Isomorphismus von $M'$ auf $X'/M^\perp$, wenn $X'/M^\perp$ mit der Quotientennorm versehen ist.

(b) Sei $\pi : X \to X/M$ die Quotientenabbildung. Dann ist die Abbildung

$$t : (X/M)' \to M^\perp, \qquad t(\varphi) := \varphi \circ \pi$$

ein isometrischer Isomorphismus von $(X/M)'$ auf $M^\perp$.

---

**Aufgabe 2** **(10 Punkte)**

Seien $X$ und $Y$ Banachräume und sei $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Weiter existiere eine Konstante $c > 0$ mit $c\|y'\| \leq \|T'y'\|$ für alle $y' \in Y'$. Zeigen Sie, dass $T$ dann offen ist.

---

**Aufgabe 3** **(12 Punkte)**

Zeigen Sie, dass jeder Banachraum $E$ topologisch isomorph zu einem Quotienten eines $\ell^1(I)$-Raumes nach einem abgeschlossenen Unterraum ist.
(Hinweis: Wählen Sie $I = \{x \in E \,:\, \|x\| \leq 1\}$.)

---

**Aufgabe 4+5*** **(6+6* Punkte)**

Sei $X$ ein normierter Raum. Mit $X''$ bezeichnet man den Dualraum von $X'$, er wird *Bidual von $X$* genannt.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$i : X \to X'', \quad (i(x))(\varphi) := \varphi(x)$$

eine lineare Isometrie ist.

**Bitte wenden!**

Die Abbildung $i$ ist i.a. nicht surjektiv. Ein Banachraum heißt *reflexiv*, falls die Abbildung $i$ surjektiv ist.

(b)* Zeigen Sie, dass abgeschlossene Unterräume reflexiver Räume wieder reflexiv sind.

---

Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten
und einen guten Rutsch ins neue Jahr!