



Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis I
Wintersemester 2008/2009

Blatt 10

Abgabe: Dienstag, 13.01.2009, vor der Vorlesung

Aufgabe 1

(9 Punkte)

Zeigen Sie, dass jeder Banachraum isometrisch in

$$\ell^\infty(I) := \{(x_i)_{i \in I} ; x_i \in \mathbb{C}, \|(x_i)_{i \in I}\|_\infty := \sup_{i \in I} |x_i| < \infty\}$$

eingebettet werden kann für eine geeignete Indexmenge I .

Aufgabe 2

(5+5=10 Punkte)

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, X ein komplexer Banachraum und $f : U \rightarrow X$ eine Funktion. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Ist f holomorph, so ist f auch schwach holomorph.
- (b) Ist $f : \mathbb{C} \rightarrow X$ eine beschränkte holomorphe Funktion, so ist f konstant.

(Hinweis: Wir nennen eine Funktion $f : U \rightarrow X$ schwach holomorph, wenn für alle $x \in X'$ die Abbildung $x \circ f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph ist. Die Funktion f heißt holomorph, falls für alle $z_0 \in U$ der Grenzwert $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existiert.)

Aufgabe 3

((4+4)+4=12 Punkte)

Untersuchen Sie in den folgenden Fällen, ob die Unterräume $\mathcal{I}$ und $\mathcal{J}$ der kommutativen Banachalgebra $\mathcal{R}$ abgeschlossene, maximale oder modulare Ideale sind.

- (a) $\mathcal{R} = C_0(\mathbb{R}) = \{f \in C(\mathbb{R}) \mid f(t) \rightarrow 0 \text{ bei } t \rightarrow \infty\}$, versehen mit der sup-Norm,

$$\mathcal{I} := \{f \in C_0(\mathbb{R}) \mid f(2009) = 0\},$$

$$\mathcal{J} := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \text{supp } f \text{ ist kompakt}\}.$$

- (b) $\mathcal{R} = C_b(\mathbb{R}) := \{f \in C(\mathbb{R}) \mid \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)| < \infty\}$, versehen mit der sup-Norm,

$$\mathcal{I} := \{f \in C_b(\mathbb{R}) \mid \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0\}.$$

Aufgabe 4

(9 Punkte)

Zeigen Sie, dass der Banachraum $\ell^1(\mathbb{Z})$ vermöge

$$[(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} * (y_n)_{n \in \mathbb{Z}}]_k := \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n y_{k-n} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

eine kommutative Banachalgebra mit Eins ist.

Bitte wenden!

Aufgabe 5***(5 Punkte)**

Zeigen Sie, dass ein Banachraum X genau dann reflexiv ist, wenn X' reflexiv ist.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ws08_09/fa1/uebungen.html