



Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis I
Wintersemester 2008/2009

Blatt 11

Abgabe: Dienstag, 20.01.2009, vor der Vorlesung

Aufgabe 1

(5+5=10 Punkte)

- (a) Sei $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ eine Banachalgebra und $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ ein abgeschlossenes zweiseitiges Ideal in $\mathcal{A}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ versehen mit der Quotientennorm $\|x+\mathcal{I}\| := \inf_{y \in \mathcal{I}} \|x+y\|_{\mathcal{A}}$ eine Banachalgebra ist.
- (b) Zeigen Sie, dass die Vervollständigung einer normierten Algebra $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra ist, die $\mathcal{A}$ als Unter algebra enthält.
-

Aufgabe 2

(5+5=10 Punkte)

- (a) Zeigen Sie, dass der Banachraum $L^1[0, 1]$ mit der Multiplikation

$$(f * g)(x) := \int_0^x f(y)g(x-y) dy, \quad x \in [0, 1]$$

eine kommutative Banachalgebra ist.

- (b) Sei $0 < \alpha < 1$. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{I}_{\alpha} := \{f \in L^1[0, 1] ; f|_{[0, \alpha]} \equiv 0 \text{ fast überall} \}$$

ein abgeschlossenes Ideal in $L^1[0, 1]$ ist, welches aus nilpotenten Elementen besteht.

Aufgabe 3

(10 Punkte)

Sei $L^1[0, 1]$ die in Aufgabe 1 eingeführte Banachalgebra. Zeigen Sie, dass für alle $f \in L^1[0, 1]$ schon $r(f) = 0$ ist.

Aufgabe 4

(4+2+4=10 Punkte)

Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra mit Einselement über $\mathbb{C}$ und seien $a, b \in \mathcal{A}$.

- (a) Zeigen Sie, dass gilt $\sigma(ab) \setminus \{0\} = \sigma(ba) \setminus \{0\}$ und $r(ab) = r(ba)$.
- (b) Belegen Sie durch ein Beispiel, dass der Fall $\sigma_{\mathcal{A}}(ab) \neq \sigma_{\mathcal{A}}(ba)$ auftreten kann.
- (c) Sei E ein endlichdimensionaler komplexer Banachraum. Zeigen Sie, dass für alle $A, B \in \mathcal{L}(E)$ gilt $\sigma_{\mathcal{L}(E)}(AB) = \sigma_{\mathcal{L}(E)}(BA)$.
-

Bitte wenden!

Aufgabe 5***(5+3=8 Punkte)**

Seien E, F Banachräume und $T \in \mathcal{K}(E, F)$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Ist T surjektiv, so ist $\dim F < \infty$.
- (b) Ist $M \subset F$ ein abgeschlossener Teilraum mit $M \subset \operatorname{Im} T$, so ist M endlichdimensional.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

`www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ws08\_09/fa1/uebungen.html`