UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht
Dipl.-Math. Natalie Didas

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis I

Wintersemester 2008/2009

Blatt 12

Abgabe: Dienstag, 27.01.2009, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 **(3+4+3+3+3=16 Punkte)**

Sei $\mathcal{R}$ eine Banachalgebra mit Einselement 1 und sei $\mathcal{A}$ eine abgeschlossene Unteralgebra von $\mathcal{R}$ mit $1 \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathcal{A}$ gilt:

(a) $\sigma_{\mathcal{R}}(x) \subset \sigma_{\mathcal{A}}(x)$.

(b) $\partial\sigma_{\mathcal{A}}(x) \subset \partial\sigma_{\mathcal{R}}(x)$.

(c) Ist $\sigma_{\mathcal{R}}(x) \subset \mathbb{R}$, so ist $\sigma_{\mathcal{R}}(x) = \sigma_{\mathcal{A}}(x)$.

(d) Ist $\mathcal{A}$ eine maximale kommutative Unteralgebra von $\mathcal{R}$, so ist $\sigma_{\mathcal{R}}(x) = \sigma_{\mathcal{A}}(x)$.

(e) Belegen Sie durch ein Beispiel, dass der Fall $\sigma_{\mathcal{R}}(x) \neq \sigma_{\mathcal{A}}(x)$ auftreten kann.

Aufgabe 2 **(5+5=10 Punkte)**

(a) Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum mit ONB $\{e_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ und $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$. Wir definieren zu $k \in \mathbb{N}_0$ beliebig aber fest eine Abbildung T auf $\mathcal{H}$ folgendermaßen:

$$T\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle e_n\Big) := \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle \alpha_n e_{n+k} \qquad \text{für alle } x \in \mathcal{H}.$$

Zeigen Sie, dass T nach $\mathcal{H}$ abbildet und stetig ist. Geben Sie $\|T\|$ an.

(b) Zeigen Sie, dass der in (a) definierte Operator genau dann kompakt ist, wenn $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

Aufgabe 3 **(5+5=10 Punkte)**

Sei T ein stetiger Operator auf einem separablen Hilbertraum $\mathcal{H}$. Man nennt T einen *Hilbert-Schmidt-Operator*, wenn es eine ONB $\{e_i,\, i \in \mathbb{N}\}$ von $\mathcal{H}$ gibt, so dass gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty}\|Te_i\|^2 < \infty. \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie, dass Bedingung (1) für jede ONB erfüllt ist, wenn sie schon für eine ONB gilt und alle Summen der Form (1) denselben Wert haben (dessen Wurzel wir mit $\|T\|_{HS}$ bezeichnen). Außerdem ist T Hilbert-Schmidt-Operator genau dann, wenn T^* ein solcher ist.

Bitte wenden!

(b) Es gilt $\|T\| \leq \|T\|_{HS}$.

(Hinweis zu (a): Zeigen Sie für zwei ONBasen $\{e_i\}, \{f_j\}$ von $\mathcal{H}$, dass $\sum_{i=1}^{\infty} \|Te_i\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|T^* f_j\|^2$ gilt.)

Aufgabe 4 **(4 Punkte)**
Zeigen Sie, dass jeder Hilbert-Schmidt-Operator kompakt ist.

Aufgabe 5* **(4 Punkte)**
Welche der Operatoren aus Aufgabe 2 sind Hilbert-Schmidt-Operatoren?

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

`www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ws08_09/fa1/uebungen.html`