UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht
Dipl.-Math. Natalie Didas

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis I

Wintersemester 2008/2009

Blatt 13

Abgabe: Dienstag, 03.02.2009, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 **(9 Punkte)**

Sei H ein Hilbertraum und $T \in \mathcal{K}(H)$ positiv und selbstadjungiert. Zeigen Sie, dass genau ein positiver selbstadjungierter Operator $S \in \mathcal{K}(H)$ existiert mit $S^2 = T$. Man schreibt $S = T^{1/2}$.

Aufgabe 2 **(4+4+4=12 Punkte)**

Sei $T : H_1 \to H_2$ ein kompakter Operator zwischen zwei Hilberträumen.

(a) Zeigen Sie, dass T^*T kompakt, selbstadjungiert und positiv ist. Der nach Aufgabe 1 daher eindeutig bestimmte Operator $(T^*T)^{1/2}$ wird mit $|T|$ bezeichnet.

(b) Es gilt $\||T|h\| = \|Th\|$ für alle $h \in H_1$.

(c) Es existieren Operatoren $U \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ und $P \in \mathcal{L}(H_1)$ mit $T = UP$, so dass P kompakt und positiv ist und $U|_{(\ker U)^\perp}$ eine Isometrie. U ist durch die Forderung $\ker U = \ker T$ eindeutig bestimmt.

Aufgabe 3 **(5+5=10 Punkte)**

Seien $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ zwei Banachräume. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Ist $A \in \mathcal{F}(E, F)$ so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und $x'_1, \ldots, x'_n \in E', y_1, \ldots, y_n \in F$ mit

$$Ax = \sum_{j=1}^{n} x'_j(x) y_j \qquad \text{für alle } x \in E.$$

(b) Ist $A \in \mathcal{F}(E, F)$, so ist $A' \in \mathcal{F}(F', E')$.

Aufgabe 4 **(9 Punkte)**

Seien E, F Banachräume und sei $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Wir nennen $S \in \mathcal{L}(F, E)$ eine *verallgemeinerte Inverse* von T, falls $TST = T$ und $STS = S$ gilt. Zeigen Sie, dass jeder Fredholmoperator eine verallgemeinerte Inverse besitzt.

Aufgabe 5* **(5 Punkte)**

Sei $S \in \mathcal{L}(F, E)$ verallgemeinerte Inverse von $T \in \Phi(E, F)$. Zeigen Sie, dass dann auch $S \in \Phi(F, E)$ ist und ausserdem $\operatorname{ind} S = -\operatorname{ind} T$ gilt.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

`www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ws08_09/fa1/uebungen.html`