UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht
Dipl.-Math. Natalie Didas

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis I

Wintersemester 2008/2009

Blatt 14

Abgabe: Dienstag, 10.02.2009, vor der Vorlesung

Aufgabe 1 **(6+4=10 Punkte)**

Seien E, F Banachräume. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Ist $T \in \Phi(E, F)$, so gilt ind $T =$ dim Ker $T-$ dim Ker T'.

(b) Ist $K \in \mathcal{L}(E)$ kompakt und $\lambda \in \sigma(K) \setminus \{0\}$, so gilt

$$\dim \operatorname{Ker} (\lambda - K) = \dim \operatorname{Ker} (\lambda - K').$$

Aufgabe 2 **(10 Punkte)**

Seien $a_0, a_1, \dots, a_n \in C([0,1])$ und sei $h \in C([0,1] \times [0,1])$. Zeigen Sie, dass der durch

$$(Tf)(t) := f^{(n+1)}(t) + \sum_{j=0}^{n} a_j(t) f^{(j)}(t) + \int_0^1 h(s,t) f^{(n+1)}(s)\, ds$$

($f \in C^{(n+1)}([0,1]), t \in [0,1]$) definierte Operator $T : C^{(n+1)}([0,1]) \to C([0,1])$ ein Fredholmoperator ist. Berechnen Sie ind(T).

Aufgabe 3 **(5+5=10 Punkte)**

Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Ein Operator $T \in \mathcal{L}(E)$ heißt *Riesz-Operator*, falls die Restklasse $T + \mathcal{K}(E)$ von T in $\mathcal{Q}(E) = \mathcal{L}(E)/\mathcal{K}(E)$ quasinilpotent ist.

(a) Zeigen Sie, dass $T \in \mathcal{L}(E)$ genau dann ein Riesz-Operator ist, wenn für alle $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ der Operator $T_\lambda := \lambda 1_E - T$ ein Fredholmoperator vom Index 0 ist.

(b) Geben Sie ein Beispiel eines Riesz-Operators $T \in \mathcal{L}(E)$ an, der kein kompakter Operator ist.

Aufgabe 4 **(10 Punkte)**

Zeigen Sie, dass ein metrisierbarer topologischer Vektorraum genau dann vollständig ist, wenn er folgenvollständig ist.

Bitte wenden!

Aufgabe 5* **(5 Punkte)**
Seien $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ zwei Banachräume. Zeigen Sie, ist $T \in \Phi(E, F)$, so ist $T' \in \Phi(F', E')$ und es gilt $\mathrm{ind}(T') = -\mathrm{ind}(T)$.

Information:

- Dies ist das letzte bewertete Übungsblatt zur Funktionalanalysis I. Um einen Leistungsnachweis zu erwerben, müssen Sie eine mündliche Prüfung ablegen. Zur Terminvereinbarung setzen Sie sich bitte mit Herrn Albrecht in Verbindung.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

`www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ws08_09/fa1/uebungen.html`