**UNIVERSITÄT DES SAARLANDES**
**FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK**
Prof. Dr. Ernst Albrecht
Dipl.-Math. Natalie Marx

# Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis I

Wintersemester 2008/2009

**Ferienübungsblatt**
**Abgabe:** Keine Abgabe

---

**Aufgabe 1**
Sei $K$ eine Teilmenge eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes $E$. Wir definieren die absolut konvexe Hülle $\Gamma(K)$ von $K$ durch

$$\Gamma(K) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i : x_1, \ldots, x_n \in K,\, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K} \text{ mit } \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \le 1 \right\}.$$

Zeigen Sie, dass $\Gamma(K)$ die kleinste absolut konvexe Menge in $E$ ist, welche $K$ enthält.

---

**Aufgabe 2**
Sei $E$ ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum und seien $A, B, M_1, \ldots, M_r \subset E$. Wir nennen $A \subset E$ beschränkt, wenn für alle Nullumgebungen $U$ in $E$ ein $\delta > 0$ existiert mit $A \subset \delta U$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Ist $A$ beschränkt, so auch der Abschluss der absolut konvexen Hülle $\overline{\Gamma(A)}$ von A.

(b) Ist $A$ kompakt, so ist $A$ beschränkt.

(c) Sind $M_1, \ldots, M_r$ absolutkonvex, so folgt

$$\Gamma(M_1 \cup \cdots \cup M_r) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i : \begin{array}{l} x_i \in M_i \text{ für } i = 1, \ldots, r \text{ und} \\ \alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{K} \text{ mit } \sum\limits_{i=1}^{r} |\alpha_i| \le 1 \end{array} \right\}.$$

(d) Sind $M_1, \ldots, M_r$ absolutkonvex und kompakt, so ist $\Gamma(M_1 \cup \cdots \cup M_r)$ kompakt.

---

**Aufgabe 3**
Zeigen Sie, dass es für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ unendlich viele paarweise verschiedene maximale Ideale $\mathcal{I}$ in der Banachalgebra $C_b(\mathbb{D})$ der stetigen und beschränkten Funktionen auf $\mathbb{D}$ gibt mit

$$\{f \in \mathcal{R};\, \tilde{f}(z) = 0\} \subset \mathcal{I}.$$

Hierbei sei $\mathcal{R}$ die abgeschlossene Unteralgebra aller auf $\mathbb{D}$ beschränkten, stetigen Funktionen $f$, die eine stetige Fortsetzung $\tilde{f}$ auf $\overline{\mathbb{D}}$ besitzen.

---

**Bitte wenden!**

**Aufgabe 4**
Sei $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ offen, sei $\mathcal{N} := \mathcal{N}(G)$ und sei

$$H^\infty(G) := \mathcal{O}(G) \cap L^\infty(G)$$

die Menge der beschränkten holomorphen Funktionen auf $G$. Zeigen Sie:

(a) Durch $h \mapsto h + \mathcal{N}$ ist eine Einbettung von $H^\infty(G)$ in $L^\infty(G)$ gegeben mit

$$\|h + \mathcal{N}\|_\infty = \sup_{z \in G} |h(z)|.$$

Wir identifizieren $H^\infty(G)$ mit dem Bild dieser Einbettung.

(b) Mit der Identifikation aus (a) ist $H^\infty(G)$ eine abgeschlossene Unteralgebra von $L^\infty(G)$.

---

**Aufgabe 5**
Zeigen Sie, dass unter den Voraussetzungen und mit den Bezeichnungen von Aufgabe 4 gilt:

(a) Für alle $z \in G$ ist

$$\delta_z : H^\infty(G) \to \mathbb{C}, \quad \delta_z(h) := h(z)$$

ein $\sigma(L^\infty(G), L^1(G))$-stetiges Funktional auf $H^\infty(G)$.

(b) $H^\infty(G)$ ist $\sigma(L^\infty(G), L^1(G))$-abgeschlossen in $L^\infty(G)$.

---

## Information:

- Um einen Leistungsnachweis zu erwerben, müssen Sie eine mündliche Prüfung ablegen. Zur Terminvereinbarung setzen Sie sich bitte mit Herrn Albrecht in Verbindung.

---

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

`www.math.uni-sb.de/~ag-albrecht/ws08_09/fa1/uebungen.html`