Funktionalanalysis 1 und 2

Ernst Albrecht

Vorlesungen im Wintersemester 2008/9 und im Sommersemester 2009

Universität des Saarlandes

Saarbrücken

Stand: 29. Januar 2009

Inhaltsverzeichnis

Einige Grundlagen aus der Algebrentheorie

In diesem vorbereitenden Abschnitt stellen wir einige Grundlagen aus der Theorie der Algebren bereit, die wir im Verlauf der Vorlesung benötigen werden.

Im Folgenden sei $\mathbb{K}$ ein beliebiger Körper.

0.1. Definition. $\mathcal{A}$ heißt eine $\mathbb{K}$–*Algebra*, wenn $\mathcal{A}$ ein $\mathbb{K}$–Vektorraum ist und auf $\mathcal{A}$ eine Multiplikation $(x, y) \mapsto xy$ von $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ nach $\mathcal{A}$ gegeben ist, so dass für alle $x, y, z \in \mathcal{A},\ \lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

(a) $x(yz) = (xy)z$
(b) $\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$
(c) $x(y + z) = xy + xz$
(d) $(x + y)z = xz + yz$.

$0 \neq 1 \in \mathcal{A}$ heißt *Einselement von* $\mathcal{A}$, falls für alle $x \in \mathcal{A}$ gilt: $1x = x1 = x$. Es gibt höchstens ein Einselement in $\mathcal{A}$, denn sind 1 und $1'$ Einselemente in $\mathcal{A}$, so ist $1 = 1 \cdot 1' = 1'$. Die Algebra $\mathcal{A}$ heißt *kommutativ*, falls $xy = yx$ für alle $x, y \in \mathcal{A}$. Ist $\mathcal{A}$ eine $\mathbb{K}$–Algebra mit Einselement 1, so heißt ein Element $x \in \mathcal{A}$ *linksinvertierbar*, falls ein $y \in \mathcal{A}$ existiert mit $yx = 1$. y heißt dann *linksinverses Element zu* x. Es kann mehrere linksinverse Elemente zu x geben. Analog definiert man *rechtsinvertierbar* und *rechtsinverses Element*. Hat x ein linksinverses Element u und ein rechtsinverses Element v, so heißt x *invertierbar*. Es folgt $u = u1 = u(xv) = (ux)v = 1v = v$. Wir nennen dann $u = v$ das zu x *inverse* Element und bezeichnen es mit x^{-1}.

Ein Untervektorraum $\mathcal{B}$ von $\mathcal{A}$ heißt *Unteralgebra* von $\mathcal{A}$, falls für alle $x, y \in \mathcal{B}$ auch $xy \in \mathcal{B}$ gilt. $\mathcal{B}$ ist dann – versehen mit den auf $\mathcal{B}$ eingeschränkten algebraischen Operationen der Addition, Multiplikation und Multiplikation mit Skalaren – selbst wieder eine Algebra.

Ist $(B_i)_{i \in I}$ eine Familie von Unteralgebren von $\mathcal{A}$, so ist auch $\bigcap_{i \in I} \mathcal{B}_i$ wieder eine Unteralgebra.

Sei nun $\mathcal{S}$ eine beliebige nicht leere Teilmenge von $\mathcal{A}$. Dann sind die Mengen

$$\mathcal{S}' := \{x \in \mathcal{A};\ \forall\ s \in \mathcal{S} : xs = sx\} \text{ und } \mathcal{S}'' := (\mathcal{S}')'$$

offensichtlich Unteralgebren von $\mathcal{A}$. Wir nennen $\mathcal{S}'$ die *Kommutantenalgebra* und $\mathcal{S}''$ die *Bikommutantenalgebra* zu $\mathcal{S}$. Besitzt $\mathcal{A}$ ein Einselement 1, so ist $1 \in \mathcal{S}' \cap \mathcal{S}''$. Ist $\mathcal{S}$ *kommutativ*, d.h. gilt $xy = yx$ für alle $x, y \in \mathcal{S}$, so ist $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}'$ und $\mathcal{S}''$ ist kommutative Unteralgebra von $\mathcal{S}'$. Die Algebra

$$\langle \mathcal{S} \rangle := \bigcap \{\mathcal{B};\ \mathcal{S} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A},\ \mathcal{B} \text{ ist Unteralgebra von } \mathcal{A}\}$$

ist offensichtlich die kleinste $\mathcal{S}$ enthaltende Unteralgebra von $\mathcal{A}$. Es ist

$$\langle \mathcal{S} \rangle = \left\{ \sum_{j=1}^{n} z_j a_j;\ n \in \mathbb{N}, z_j \in \mathbb{C},\ a_j \text{ ist endliches Produkt von Elementen aus } \mathcal{S} \right\} .$$

$\langle\mathcal{S}\rangle$ heißt die von $\mathcal{S}$ erzeugte Unteralgebra von $\mathcal{A}$. Wir fassen einige elementare Eigenschaften von $\mathcal{S}'$ und $\mathcal{S}''$ in dem folgenden unmittelbar einsichtigen Lemma zusammen.

0.2. Lemma. *Sei $\mathcal{A}$ eine $\mathbb{K}$–Algebra und sei $\mathcal{S}$ eine beliebige nicht leere Teilmenge von $\mathcal{A}$.*

(a) *Ist $\mathcal{S}$ kommutativ, so ist $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}'' \subseteq \mathcal{S}'$ und $\mathcal{S}''$ ist kommutativ.*
(b) *Ist $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{A}$, so ist $\mathcal{S}_1' \subseteq \mathcal{S}'$ und $\mathcal{S}'' \subseteq \mathcal{S}_1''$.*
(c) *Hat $\mathcal{A}$ ein Einselement und ist $x \in \mathcal{S}$ in $\mathcal{A}$ invertierbar, so ist $x^{-1} \in \mathcal{S}''$.*
(d) *$\mathcal{A}' =: Z(\mathcal{A})$ heißt das Zentrum von $\mathcal{A}$ und ist eine kommutative Unteralgebra von $\mathcal{A}$.*

0.3. Adjunktion der Eins. Besitzt die Algebra $\mathcal{A}$ kein Einselement, so kann man $\mathcal{A}$ auf folgende Art und Weise in eine Algebra $\mathcal{A}_1$ mit einem Einselement einbetten. Wir setzen $\mathcal{A}_1 := \mathcal{A}\times\mathbb{K}$. $\mathcal{A}_1$ ist dann ein Vektorraum mit den komponentenweisen Operationen der Addition und der Multiplikation mit Skalaren. Durch

$$((x,z),(y,w)) \mapsto (xy + wx + zy, zw) \text{ für } x,y \in \mathcal{A},\ z,w \in \mathbb{K}\ ,$$

wird eine Multiplikation auf $\mathcal{A}_1$ erklärt, die den Bedingungen (a) – (d) genügt und, wenn wir $\mathcal{A}$ mit einer kanonischen Einbettung $\mathcal{A} \times \{0\}$ in $\mathcal{A}_1$ identifizieren, die Multiplikation von $\mathcal{A}$ fortsetzt. Damit wird $\mathcal{A}$ zu einer Unteralgebra von $\mathcal{A}_1$. Man rechnet unmittelbar nach, dass $1 := (0,1)$ Einselement für $\mathcal{A}_1$ ist. Wegen $(x,z) = (x,0) + (0,z) = (x,0) + z1$ und der obigen Identifikation schreiben wir auch einfach $x + z1$ statt (x,z). Mit dieser Identifikation gilt $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} \oplus \mathbb{K}\cdot 1$. Wir nennen diese Konstruktion eine *Adjunktion der Eins.*

0.4. Definitionen. Sei $\mathcal{A}$ eine $\mathbb{K}$–Algebra. Ein Untervektorraum $\mathcal{I}$ von $\mathcal{A}$ heißt *Linksideal* (bzw. *Rechtsideal*), falls

$$\mathcal{A}\mathcal{I} := \{ax;\ a \in \mathcal{A},\ x \in \mathcal{I}\} \subseteq \mathcal{I} \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{I}\mathcal{A} := \{xa;\ a \in \mathcal{A},\ x \in \mathcal{I}\} \subseteq \mathcal{I}\ .$$

Wir nennen ein Links– (bzw. Rechts–)Ideal $\mathcal{I}$ von $\mathcal{A}$ *echt*, falls $\mathcal{I}$ von $\mathcal{A}$ verschieden ist. $\mathcal{I}$ heißt ein *zweiseitiges Ideal* in $\mathcal{A}$, falls $\mathcal{I}$ sowohl ein Links– als auch ein Rechtsideal von $\mathcal{A}$ ist. Jedes Ideal ist offensichtlich auch eine Unteralgebra. Ist $x \in \mathcal{A}$, so ist $\mathbb{K}x + \mathcal{A}x$ (bzw. $\mathbb{K}x + x\mathcal{A}$, bzw. $\mathbb{K}x + x\mathcal{A} + \mathcal{A}x + LH(\mathcal{A}x\mathcal{A})$) das kleinste Links– (bzw. Rechts–, bzw. zweiseitige) Ideal in $\mathcal{A}$, welches x enthält, und ist in jedem Links– (bzw. Rechts–, bzw. zweiseitigen) Ideal enthalten, das auch x enthält. Ein Links– (bzw. Rechts–)Ideal $\mathcal{I}$ von $\mathcal{A}$ heißt *modular*, falls es ein Element u in $\mathcal{A}$ gibt, so dass für alle $x \in \mathcal{A}$ gilt: $x - xu \in \mathcal{I}$ (bzw. $x - ux \in \mathcal{I}$). Jedes solche u nennt man dann eine *modulare rechte* (bzw. *linke) Einheit für $\mathcal{I}$*. Besitzt die Algebra $\mathcal{A}$ ein Einselement 1, so ist 1 offensichtlich für jedes modulare Links– bzw. Rechtsideal eine modulare rechte bzw. linke Einheit. Insbesondere ist dann jedes Ideal in $\mathcal{A}$ modular.

0.5. Lemma. *Sei $\mathcal{A}$ eine $\mathbb{K}$–Algebra mit Einselement* 1 *und $x \in \mathcal{A}$. Dann gilt:*

(a) *x ist genau dann linksinvertierbar, wenn x in keinem echten Linksideal enthalten ist.*
(b) *x ist genau dann rechtsinvertierbar, wenn x in keinem echten Rechtsideal enthalten ist.*
(c) *x ist genau dann invertierbar, wenn x in keinem echten Links– oder Rechtsideal enthalten ist.*
(d) 1 *ist in keinem echten Links– oder Rechtsideal enthalten.*

Beweis. Wir zeigen (a). (b) erhält man dann analog und die übrigen Aussagen folgen unmittelbar aus (a) und (b).

" $\Longrightarrow$": Ist $y \in \mathcal{A}$ mit $yx = 1$, so ist $\mathcal{A} = \mathcal{A}1 = \mathcal{A}(yx) = (\mathcal{A}y)x \subseteq \mathcal{A}x$ in jedem Linksideal enthalten, das x enthält.

" $\Longleftarrow$": $\mathcal{A}x$ ist ein Linksideal, welches x enthält. Nach Voraussetzung muss also $\mathcal{A}x = \mathcal{A}$ gelten. Insbesondere existiert ein $y \in \mathcal{A}$ mit $yx = 1$. □

0.6. Definitionen. Sei $\mathcal{A}$ eine $\mathbb{K}$–Algebra.

(a) Eine kommutative Unteralgebra $\mathcal{B}$ von $\mathcal{A}$ heißt *maximal kommutative Unteralgebra* von $\mathcal{A}$, falls $\mathcal{B}$ in keiner von $\mathcal{B}$ verschiedenen kommutativen Unteralgebra von $\mathcal{A}$, enthalten ist.

(b) Ein echtes Linksideal $\mathcal{I}$ von $\mathcal{A}$ heißt *maximales Linksideal*, falls es in keinem von $\mathcal{I}$ verschiedenen echten Linksideal enthalten ist. Analog definiert man Maximalität für Rechtsideale, zweiseitige Ideale, und modulare Links– oder Rechtsideale.

0.7. Satz. *Sei $\mathcal{A}$ eine $\mathbb{K}$–Algebra und sei $\mathcal{S}$ eine beliebige nicht leere kommutative Teilmenge von $\mathcal{A}$. Dann gibt es eine maximale kommutative Unteralgebra $\mathcal{K}$ von $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{K}$. $\mathcal{S}''$ ist in jeder maximal kommutativen Unteralgebra enthalten, die $\mathcal{S}$ enthält.*

Beweis. Wir setzen $\mathfrak{K} := \{\mathcal{K};\ \mathcal{S} \subseteq \mathcal{K} \subseteq \mathcal{A}, \mathcal{K}\,\text{kommutative Unteralgebra}\}$. Es ist $\mathfrak{K} \neq \emptyset$ wegen $\mathcal{S}'' \in \mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}$ ist durch die Inklusion teilweise geordnet. Sei $\mathcal{J}$ eine totalgeordnete Teilmenge von $\mathfrak{K}$. Dann ist $\mathcal{K}_0 := \bigcup\{\mathcal{K}; \mathcal{K} \in \mathcal{J}\}$ offensichtlich wieder eine kommutative Unteralgebra, die $\mathcal{S}$ enthält und damit eine obere Schranke für $\mathcal{J}$ aus $\mathfrak{K}$ ist. Nach dem Zornschen Lemma besitzt $\mathfrak{K}$ also wenigstens ein maximales Element, das dann natürlich eine maximale kommutative Unteralgebra von $\mathcal{A}$ ist. Die übrigen Aussagen folgen nun leicht. □

0.8. Satz. *Sei $\mathcal{A}$ eine $\mathbb{K}$–Algebra.*

(a) *Ist $\mathcal{I}$ ein modulares Linksideal und ist u eine modulare rechte Einheit für $\mathcal{I}$, so ist u auch für jedes $\mathcal{I}$ enthaltende Linksideal wieder eine modulare rechte Einheit. Insbesondere ist also jedes $\mathcal{I}$ enthaltende Linksideal wieder ein modulares Linksideal. Es ist $u \notin \mathcal{I}$.*

(b) *Jedes echte modulare Linksideal $\mathcal{I}$ ist in einem maximalen modularen Linksideal enthalten.*

(c) *Jedes maximale modulare Linksideal $\mathcal{I}$ ist auch ein maximales Ideal von $\mathcal{A}$.*

(d) *Besitzt $\mathcal{A}$ ein Einselement 1, so ist jedes Linksideal in $\mathcal{A}$ in einem maximalen Linksideal enthalten.*

Entsprechende Aussagen gelten auch für Rechtsideale.

Beweis. (a) ist klar, außer der letzten Aussage, die wir beweisen wollen. Wäre $u \in \mathcal{I}$, so würde für alle $a \in \mathcal{A}$ folgen: $a = a - au + au \in \mathcal{I} + \mathcal{I} = \mathcal{I}$, im Widerspruch dazu, dass $\mathcal{I}$ nach Voraussetzung ein echtes Linksideal ist.

(b) Sei also $\mathcal{I}$ ein echtes modulares Linksideal und sei u eine rechte modulare Einheit für $\mathcal{I}$. Wir setzen $\mathfrak{K} := \{\mathcal{K};\ \mathcal{I} \subseteq \mathcal{K} \subseteq \mathcal{A},\ \mathcal{K}\,\text{echtes Linksideal}\}$. Es ist $\mathfrak{K} \neq \emptyset$ wegen $\mathcal{I} \in \mathfrak{K}$ und $\mathcal{K}$ ist durch die Inklusion teilweise geordnet. Sei $\mathcal{J}$ eine totalgeordnete Teilmenge von $\mathfrak{K}$. Dann ist

$$\mathcal{K}_0 := \bigcup\{\mathcal{K};\ \mathcal{K} \in \mathcal{J}\}$$

offensichtlich wieder ein $\mathcal{I}$ enthaltendes Linksideal mit u als rechter modularer Einheit. Nach (a) ist u in keinem der Ideale aus $\mathfrak{K}$ und damit auch nicht in deren Vereinigung $\mathcal{K}_0$ enthalten. Damit ist gezeigt, dass $\mathcal{K}_0$ eine obere Schranke zu $\mathcal{J}$ aus $\mathfrak{K}$ ist. Nach dem Zornschen Lemma besitzt $\mathfrak{K}$ also wenigstens ein maximales Element, das dann natürlich ein maximales $\mathcal{I}$ enthaltendes Linksideal sein muss (welches nach (a) auch wieder modular mit u als modularer Einheit ist). Damit folgen auch die Aussagen (c) und (d). □

0.9. Definition. Sei $\mathcal{A}$ eine $\mathbb{K}$–Algebra mit Einselement 1. Wir definieren das *Links-* und das *Rechtsradikal* durch

$$L-\mathrm{rad}(\mathcal{A}) := \{x \in \mathcal{A}; (1-yx)^{-1} \text{ existiert in } \mathcal{A} \text{ für alle } y \in \mathcal{A}\}$$

und

$$R-\mathrm{rad}(\mathcal{A}) := \{x \in \mathcal{A}; (1-xy)^{-1} \text{ existiert in } \mathcal{A} \text{ für alle } y \in \mathcal{A}\} .$$

0.10. Satz. *Sei $\mathcal{A}$ eine $\mathbb{K}$–Algebra mit Einselement* 1. *Dann gilt:*

(a) $L-\mathrm{rad}(\mathcal{A}) = R-\mathrm{rad}(\mathcal{A}) =: \mathrm{rad}(\mathcal{A})$.

(b) $\mathrm{rad}(\mathcal{A}) = \bigcap\{\mathcal{I};\ \mathcal{I} \text{ ist maximales Linksideal in } \mathcal{A}\}$
$= \bigcap\{\mathcal{I};\ \mathcal{I} \text{ ist maximales Rechtsideal in } \mathcal{A}\}$

Beweis. (a) Wir zeigen:

$$\forall\ x, y \in \mathcal{A} : (1-xy)^{-1} \text{ existiert } \Leftrightarrow (1-yx)^{-1} \text{ existiert.} \tag{0.1}$$

Es genügt hierzu " $\Rightarrow$" zu zeigen. Die Rückrichtung erhält man dann, indem man die Rollen von x und y vertauscht. Es existiere also: $u := (1-xy)^{-1}$ in $\mathcal{A}$. Dann folgt:

$$(1+yux)(1-yx) = 1-yx+yux-yuxyx = 1-yx+yu(1-xy)x = 1-yx+yx = 1 .$$

Ferner

$$(1-yx)(1+yux) = 1-yx+y(1-yx)ux = 1-yx+yx = 1 .$$

(b) Wir zeigen nur die erste Gleichung. Der Beweis der zweiten Gleichung verläuft analog.

" $\supseteq$": Sei also $x \in \cap\{\mathcal{I};\ \mathcal{I} \text{ ist maximales Linksideal in } \mathcal{A}\}$ und sei $y \in \mathcal{A}$ beliebig.

Annahme: $1-xy$ ist **nicht** in $\mathcal{A}$ linksinvertierbar. Dann ist $1-xy$ nach Lemma 5.a und Satz 8.d in einem maximalen Linksideal $\mathcal{I}_0$ enthalten. Wegen $x \in \mathcal{I}_0$ folgt dann auch $yx \in \mathcal{I}_0$ und hieraus $1 = (1-yx)+yx \in \mathcal{I}_0$ im Widerspruch zu teil (d) von Lemma 5. Also hat $1-xy$ ein linksinverses Element u.
Wir zeigen (ebenfalls durch indirekten Beweis), dass u auch rechtsinvers zu $1-xy$ ist.

Annahme: u ist **nicht** in $\mathcal{A}$ linksinvertierbar. Dann ist u nach Lemma 5.a und Satz 8 in einem maximalen Linksideal $\mathcal{I}_0$ enthalten. Wegen $x \in \mathcal{I}_0$ folgt dann auch $uyx \in \mathcal{I}_0$ und hieraus $1 = u(1-xy) = u-uyx \in \mathcal{I}_0$ im Widerspruch zu Teil (d) von Lemma 5. Also hat u ein linksinverses Element, welches mit dem rechtsinversen Element $1-xy$ übereinstimmen muss. Nach (a) ist $x \in \mathrm{rad}(\mathcal{A})$.

" $\subseteq$": Sei nun umgekehrt $x \in \mathrm{rad}(\mathcal{A})$ gegeben.

Annahme: Es gibt ein maximales Linksideal $\mathcal{I}_0$, welches x nicht enthält. Dann muss wegen der Maximalität von $\mathcal{I}_0$ gelten: $\mathcal{I}_0 + \mathcal{A}x = \mathcal{A}$. Es gibt also Elemente $u \in \mathcal{I}_0$ und $y \in \mathcal{A}$, so dass $u+yx = 1$. Also ist $u = 1-yx$. Dies ist jedoch ein Widerspruch, da u wegen Lemma 5.c nicht invertierbar sein kann, aber $1-yx$ invertierbar ist wegen $x \in \mathrm{rad}(\mathcal{A})$. Also ist x doch in allen maximalen Linksidealen enthalten. □

0.11. Folgerung. *Sei $\mathcal{A}$ eine $\mathbb{K}$–Algebra mit Einselement* 1. *Dann ist* $\mathrm{rad}(\mathcal{A})$ *ein zweiseitiges Ideal in $\mathcal{A}$.*

Dies ergibt sich unmittelbar aus Satz 10, da beliebige Durchschnitte von Links– bzw. Rechtsidealen wieder Links- bzw. Rechtsideale sind.

0.12. Definition. Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei $\mathbb{K}$–Algebren. Eine lineare Abbildung $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ heißt:

- *(Algebren-)Homomorphismus*, falls Φ linear ist und $\Phi(xy) = \Phi(x)\Phi(y)$ für alle $x, y \in \mathcal{A}$ gilt.
- *(Algebren-)Monomorphismus*, falls Φ ein injektiver Algebrenhomomorphismus ist.
- *(Algebren-)Epimorphismus*, falls Φ ein surjektiver Algebrenhomomorphismus ist.

- *(Algebren-)Isomorphismus*, falls Φ ein bijektiver Algebrenhomomorphismus ist.

Besitzen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Einselemente 1 bzw. $1'$, so nennen wir einen Algebrenhomomorphismus $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *unital*, falls $\Phi(1) = 1'$ gilt.

0.13. Lemma. *Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei $\mathbb{K}$–Algebren und sei $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein Algebrenhomomorphismus.*

(a) $\ker(\Phi) := \{x \in \mathcal{A};\ \Phi(x) = 0\}$ *ist ein zweiseitiges Ideal in $\mathcal{A}$. Dieses ist echt, falls $\Phi \not\equiv 0$.*
(b) $\mathrm{ran}(\Phi) := \Phi(\mathcal{A}) = \{\Phi(x);\ x \in \mathcal{A}\}$ *ist eine Unteralgebra von $\mathcal{B}$.*
(c) *Ist Φ surjektiv und $\mathcal{I}$ ein Links– (bzw. Rechts–, bzw. zweiseitiges) Ideal in $\mathcal{A}$, so ist auch $\Phi(\mathcal{I})$ ein Links– (bzw. Rechts–, bzw. zweiseitiges) Ideal in $\mathcal{B}$.*

Dies zeigt man leicht durch direktes Nachrechnen.

0.14. Definition. Sei $\mathcal{A}$ eine $\mathbb{K}$–Algebra und sei $\mathcal{I}$ ein zweiseitiges Ideal in $\mathcal{A}$. Auf dem Quotientenvektorraum $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ definieren wir durch

$$[x] \cdot [y] := [xy] \text{ für } [x] = x + \mathcal{I},\ [y] = y + \mathcal{I} \in \mathcal{A}/\mathcal{I}$$

eine Multiplikation, durch die $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ zu einer Algebra wird. Wir nennen $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ die *Quotientenalgebra* von $\mathcal{A}$ nach dem zweiseitigen Ideal $\mathcal{I}$.

Wir zeigen nur die Wohldefiniertheit der Multiplikation. Daß diese dann den Bedingungen (a) – (d) in Definition 1 genügt, rechnet man dann leicht nach. Seien also $[x] = x + \mathcal{I},\ [y] = y + \mathcal{I} \in \mathcal{A}/\mathcal{I}$ beliebig und seien $x', y' \in \mathcal{A}$ mit $[x] = [x'],\ [y] = [y']$. Dann liegen $x - x'$ und $y - y'$ in $\mathcal{I}$ und es folgt

$$xy - x'y' = \underbrace{(x - x')}_{\in\mathcal{I}}y + x'\underbrace{(y - y')}_{\in\mathcal{I}} \in \mathcal{I} \text{ d.h. } [xy] = [x'y'] \ .$$

Der kanonische Epimorphismus $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{I}$ mit $\pi(x) = [x]$ für alle $x \in \mathcal{A}$ ist ein Algebrenepimorphismus mit $\ker(\pi) = \mathcal{I}$. Besitzt $\mathcal{A}$ ein Einselement 1, so ist $\pi(1) = [1]$ das Einselement von $\mathcal{A}/\mathcal{I}$. Es gilt der

0.15. Homomorphiesatz. *Für jeden Algebrenhomomorphismus $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ von einer $\mathbb{K}$–Algebra $\mathcal{A}$ in eine $\mathbb{K}$–Algebra $\mathcal{B}$ ist das folgende Diagramm kommutativ:*

$$\begin{tikzcd}
\Phi : \mathcal{A} \arrow[rr] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathrm{ran}(\Phi) \subseteq \mathcal{B} \\
& \mathcal{A}/\ker(\Phi) \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

Hierbei sei π der kanonische Epimorphismus und $\psi([x]) := \Phi(x)$ für $[x] = x + \ker(\Phi) \in \mathcal{A}/\ker(\Phi)$. ψ ist ein Algebrenisomorphismus.

Eine $\mathbb{K}$–Algebra $\mathcal{A}$ mit Einselement 1 heißt *halbeinfach*, falls $\mathrm{rad}(\mathcal{A}) = \{0\}$. Sie heißt *einfach*, falls $\{0\}$ und $\mathcal{A}$ die einzigen zweiseitigen Ideale in $\mathcal{A}$ sind.

0.16. Lemma. *Sei $\mathcal{A}$ eine $\mathbb{K}$–Algebra mit Einselement* 1.

(a) *Sei $\mathcal{I}$ ein zweiseitiges Ideal in $\mathcal{A}$. Genau dann ist $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ einfach, wenn $\mathcal{I}$ ein* **maximales** *zweiseitiges Ideal in $\mathcal{A}$ ist.*
(b) $\mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A})$ *ist halbeinfach.*

Beweis. (a) Sei $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{I}$ der kanonische Epimorphismus.
"$\Leftarrow$": Ist $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ nicht einfach, so gibt es ein nicht-triviales Ideal $\mathcal{J}$ in $\mathcal{A}/\mathcal{I}$, d.h. ein Ideal mit $\{[0]\} \neq \mathcal{J} \neq \mathcal{A}/\mathcal{I}$. $\mathcal{J}_0 := \pi^{-1}(\mathcal{J})$ ist dann ein zweiseitiges Ideal in $\mathcal{A}$. Wegen $\mathcal{J} \neq \{[0]\}$ ist $\mathcal{I} = \ker(\pi) \subsetneqq \mathcal{J}_0$ und wegen $\mathcal{J} \neq \mathcal{A}/\mathcal{I}$ ist $\mathcal{J}_0 := \pi^{-1}(\mathcal{J}) \neq \mathcal{A}$. Also kann $\mathcal{I}$ kein maximales Ideal sein.

" ⇒": Sei nun $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ einfach und sei $\mathcal{J}_0$ ein echtes zweiseitiges $\mathcal{I}$ enthaltendes Ideal in $\mathcal{A}$. Dann ist $\pi(\mathcal{J}_0)$ ein echtes zweiseitiges Ideal in $\mathcal{A}/\mathcal{I}$. Da $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ einfach ist, muss $\pi(\mathcal{J}_0) = \{[0]\}$ und damit $\mathcal{J}_0 = \pi^{-1}(\{[0]\}) = \mathcal{I}$ sein. Also ist $\mathcal{I}$ ein maximales zweiseitiges Ideal in $\mathcal{A}$. (b) Sei $[x] \in \mathrm{rad}(\mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A}))$, $x \in [x]$ und sei $y \in \mathcal{A}$ beliebig. Dann existiert $([1] - [x][y])^{-1}$ in $\mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A})$. Es gibt also ein $z \in \mathcal{A}$ und ein $u \in \mathrm{rad}(\mathcal{A})$ mit $z(1 - xy) = 1 + u = 1 - (-1)u$. Wegen $u \in \mathrm{rad}(\mathcal{A})$ ist die rechte und damit auch die linke Seite dieser Gleichung invertierbar. Es gibt also ein $v \in \mathcal{A}$ mit $vz(1 - xy) = 1$. Analog zeigt man, dass $1 - xy$ auch rechts invertierbar ist. Da dies für alle $y \in \mathcal{A}$ gilt, folgt $x \in \mathrm{rad}(\mathcal{A})$ und damit $[x] = [0]$ in $\mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A})$. Also ist $\mathrm{rad}(\mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A})) = \{[0]\}$. □

Eine kommutative $\mathbb{K}$–Algebra $\mathcal{A}$ mit Einselement 1 heißt *Körper* (über $\mathbb{K}$), falls jedes von 0 verschiedene Element aus $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}$ invertierbar ist.

0.17. Lemma. *Sei $\mathcal{A}$ eine kommutative $\mathbb{K}$–Algebra mit Einselement 1 und sei $\mathcal{I}$ ein zweiseitiges Ideal in $\mathcal{A}$. Genau dann ist $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ ein Körper, wenn $\mathcal{I}$ maximal ist.*

Beweis. " ⇒": Sei $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ ein Körper und sei $[0] \neq [x] \in \mathcal{A}/\mathcal{I}$ beliebig. Nach Voraussetzung existiert $[x]^{-1}$ in $\mathcal{A}/\mathcal{I}$. Nach Lemma 5 ist also $[x]$ in keinem echten Ideal von $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ enthalten. Also muss $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ einfach sein. Nach Lemma 0.16 (a) folgt hieraus die Maximalität von $\mathcal{I}$.

" ⇐": Sei nun $\mathcal{I}$ ein maximales Ideal in $\mathcal{A}/\mathcal{I}$. Nach Lemma 0.16 (a) ist $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ dann einfach. Ist also $[0] \neq [x] \in \mathcal{A}/\mathcal{I}$, so ist $[x]$ in keinem echten Ideal von $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ enthalten und daher nach Lemma 0.5 invertierbar. Also ist $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ ein Körper. □

KAPITEL 1

Banachräume: Definition und erste Eigenschaften

Im folgenden bezeichne $\mathbb{K}$ stets den Körper $\mathbb{R}$ der reellen oder den Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen. Wir wiederholen zunächst einige elementare Definitionen und Tatsachen über normierte Räume.

1.1. Definition. Sei E ein $\mathbb{K}$–Vektorraum. Eine Abbildung $p : E \to [0,\infty)$ heißt *Halbnorm* auf E, falls gilt

(N2) $\forall x \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}: \qquad p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$,
(N3) $\forall x, y \in E: \qquad p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.

Gilt zusätzlich

(N1) $\forall x \in E: \quad p(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$,

so heißt p eine *Norm* auf E und (E,p) ein *normierter Raum*.

Normen werden häufig auch durch $\|\cdot\|$ bezeichnet.

Ist $\mathfrak{R}$ eine $\mathbb{K}$–Algebra und ist auf $\mathfrak{R}$ eine Norm $\|\cdot\|$ gegeben mit $\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ für alle $x, y \in \mathfrak{R}$, so nennen wir die Norm $\|\cdot\|$ *submultiplikativ* und $(\mathfrak{R}, \|\cdot\|)$ eine normierte $\mathbb{K}$–Algebra.

Ist $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{K}$–Vektorraum, so wird durch $d_{\|\cdot\|} : E \times E \to [0,\infty)$ mit $d_{\|\cdot\|}(x,y) := \|x-y\|$ für alle $x, y \in E$ eine Metrik auf E definiert. Eine Menge $\Omega \subseteq E$ heißt *offen* bezüglich $\|\cdot\|$, falls es zu jedem $x \in E$ ein $\varepsilon > 0$ gibt mit

$$U_\varepsilon(x) := \{u \in E\,;\ \|u - x\| < \varepsilon\} \subseteq \Omega\,.$$

Eine Menge $A \subseteq E$ heißt *abgeschlossen* bezüglich $\|\cdot\|$, falls $E \setminus A$ offen ist. Die hierdurch auf E gegebene Topologie[1] bezeichnen wir auch mit $\tau_{\|\cdot\|}$ und nennen sie die *Normtopologie*. Eine Folge $(x_n)_{n=1}^\infty$ aus E heißt *Cauchy–Folge*, falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geq n_0: \qquad \|x_n - x_m\| < \varepsilon\,.$$

Eine Folge $(x_n)_{n=1}^\infty$ aus E heißt *konvergent* in $(E, \|\cdot\|)$, falls es ein $y \in E$ gibt mit

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0: \qquad \|x_n - y\| < \varepsilon\,.$$

Man rechnet leicht nach, daß y hierdurch eindeutig bestimmt ist. Wir schreiben dann $x_n \to y$ für $n \to \infty$ oder $y = \lim_{n\to\infty} x_n$ und nennen y den *Grenzwert* der Folge $(x_n)_{n=1}^\infty$.

Die abgeschlossene *Einheitskugel* $\{x \in E\,;\ \|x\| \leq 1\}$ von E bezeichnen wir auch mit B_E. Eine Menge $B \subset E$ heißt *normbeschränkt* (oder kurz: beschränkt), falls es ein $C > 0$ gibt mit $\|a\| \leq C$ für alle $a \in A$.

1.2. Definition. Ein normierter $\mathbb{K}$–Vektorraum $(E, \|\cdot\|)$ heißt *Banachraum*, falls er *vollständig* ist, d.h. falls jede Cauchy–Folge aus E bezüglich $\|\cdot\|$ konvergent ist. Eine normierte $\mathbb{K}$–Algebra $(\mathfrak{R}, \|\cdot\|)$ heißt *Banachalgebra*, falls $(\mathfrak{R}, \|\cdot\|)$ vollständig ist.

---

[1] Ist X eine Menge und τ eine Familie von Teilmengen von X mit den folgenden Eigenschaften

(O1) $\emptyset, X \in \tau$,
(O2) Beliebige Vereinigungen von Mengen aus τ liegen wieder in τ,
(O3) Endliche Durchschnitte von Mengen aus τ liegen wieder in τ,

so heißt τ eine *Topologie* auf X und (X,τ) ein *topologischer Raum*. Die Mengen aus τ heißen *offene Teilmengen von* (X,τ).

Eine Teilmenge A eines normierten Raums $(E, \|\cdot\|)$ heißt *vollständig*, falls für jede Cauchy–Folge $(a_n)_{n=1}^\infty$ von Elementen aus A gilt: $(a_n)_{n=1}^\infty$ ist konvergent in $(E, \|\cdot\|)$ und $\lim_{n\to\infty} a_n \in A$.

Die folgenden zum Teil schon aus den Anfängervorlesungen bekannten Aussagen werden wir häufig benutzen.

1.3. Lemma. *Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{K}$–Vektorraum.*

(a) *Eine Teilmenge A von E ist abgeschlossen genau dann, wenn für jede in $(E, \|\cdot\|)$ konvergente Folge $(a_n)_{n=1}^\infty$ von Elementen aus A gilt: $\lim_{n\to\infty} a_n \in A$.*

(b) *Jede Cauchyfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(E, \|\cdot\|)$ ist beschränkt, d.h. es ist $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < \infty$.*

(c) *Jede vollständige Teilmenge von E ist abgeschlossen.*

(d) *Ist $(E, \|\cdot\|)$ vollständig, so ist jede abgeschlossene Teilmenge von E vollständig.*

(e) *$(E, \|\cdot\|)$ ist genau dann vollständig, wenn jede absolutkonvergente Reihe aus E konvergent in E ist, d.h. wenn für jede Reihe $\sum_{n=1}^\infty x_n$ in E mit $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\| < \infty$ der Grenzwert $s := \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^m x_n$ in E existiert.*

Beweis. (a) Sei $A \subseteq E$ abgeschlossen und sei $(a_n)_{n=1}^\infty$ eine beliebige in E gegen ein $y \in E$ konvergente Folge von Elementen aus A. Wäre $y \in E \setminus A$, so gäbe es, da $E \setminus A$ offen ist, ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subseteq E \setminus A$. Insbesondere würde für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten $\|a_n - y\| > \varepsilon$ im Widerspruch zu $\|a_n - y\| \to 0$ für $n \to \infty$. Also gilt $y = \lim_{n\to\infty} a_n \in A$.

Habe nun umgekehrt jede in E konvergente Folge aus A ihren Grenzwert in A. Wäre A nicht abgeschlossen, so gäbe es einen Punkt $y \in E \setminus A$, so daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ es ein $a_n \in A \cap U_{1/n}(y)$ gäbe. Es würde folgen: $a_n \to y$ für $n \to \infty$ aber $y \notin A$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Also muß A abgeschlossen sein.

(b) Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $(E, \|\cdot\|)$, so gibt es zu $\varepsilon = 1$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq n_0$ gilt $\|x_n - x_{n_0}\| < 1$ und damit auch $\|x_n\| < \|x_0\| + 1$. Es folgt für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$\|x_k\| \leq \max\{\|x_j\|\,;\, 1 \leq j \leq n_0\} + \|x_0\| + 1 < \infty.$$

(c) und (d) folgen unmittelbar aus (a).

(e) Sei $\sum_{n=1}^\infty a_n$ eine absolut konvergente Reihe in E. Dann ist die Folge ihrer Partialsummen eine Cauchy–Folge in $(E, \|\cdot\|)$. Ist $(E, \|\cdot\|)$ vollständig, so besitzt diese Folge also einen Grenzwert in E.

Besitze nun umgekehrt jede absolutkonvergente Reihe aus E einen Grenzwert in E und sei $(x_n)_{n=1}^\infty$ eine beliebige Cauchy–Folge aus E. Dann gibt es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $n_k \in \mathbb{N}$ mit $\|x_n - x_{n_k}\| \leq 2^{-k}$ für alle $n \geq n_k$. Die Reihe $x_{n_1} + \sum_{k=1}^\infty (x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$ ist dann absolut konvergent, besitzt also nach Voraussetzung einem Grenzwert x_0 in E. Ist $\varepsilon > 0$ beliebig, so gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $2^{1-k_0} < \varepsilon/2$ und $\left\|x_{n_1} + \sum_{k=1}^{k_0-1} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) - x_0\right\| < \varepsilon/2$. Für alle $n \geq n_{k_0}$ gilt dann

$$\|x_n - x_0\| \leq \|x_n - x_{n_{k_0}}\| + \|x_{n_{k_0}} - x_0\| < \frac{\varepsilon}{2} + \left\|x_{n_1} + \sum_{k=1}^{k_0} (x_{n_{k_{n+1}}} - x_{n_k}) - x_0\right\| < \varepsilon\,.$$

Die Folge $(x_n)_{n=1}^\infty$ konvergiert also gegen x_0. □

1.4. Beispiele. Sei I eine nicht leere Menge und K ein kompakter Hausdorffraum[2].

(a) Die Menge $\ell^\infty(I) := \{x = (x_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I\,;\, \|x\|_\infty := \sup_{i\in I} |x_i| < \infty\}$ ist, versehen mit den komponentenweisen Operationen der Addition der Multiplikation und der Multiplikation mit Skalaren eine Banachalgebra bezüglich der Norm $\|\cdot\|_\infty$.

[2] Ein topologischer Raum (X, τ) heißt *separiert* oder *Hausdorffraum*, falls es zu je zwei verschiedenen Punten $x_1, x_2 \in X$ disjunkte offene Mengen U_1, U_2 gibt mit $x_j \in U_j$ für $j = 1, 2$. (X, τ) heißt *kompakt*, falls jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

(b) Die Algebra der stetigen $\mathbb{K}$–wertigen Funktionen auf K ist eine abgeschlossene Unteralgebra von $\ell^\infty(K)$ und daher bezüglich der Supremumsnorm $\|\cdot\|_K$ eine Banachalgebra.

(c) Für alle $1 \le p < \infty$ ist

$$\ell^p(I) := \{x = (x_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I \,;\, \|x\|_p^p := \sup_{F\subseteq I \text{ endlich}} \sum_{i\in F} |x_i|^p < \infty\}$$

versehen mit den komponentenweisen Operationen der Addition der Multiplikation und der Multiplikation mit Skalaren eine Banachalgebra bezüglich der Norm $\|\cdot\|_p$.

1.5. Lemma. *Sei E ein $\mathbb{K}$–Vektorraum und sei $q : E \to [0,\infty)$ eine Halbnorm auf E. Dann gilt:*

(a) *$N_q := \{x \in E \,;\, q(x) = 0\}$ ist ein Untervektorraum von E.*

(b) *E/N_q wird zu einem normierten $\mathbb{K}$-Vektorraum mit der durch $\|[x]\|_q := q(x)$ für alle $[x] := x + N_q = \{x + u \,;\, q(u) = 0\} \in E/N_q$, $x \in X$, definierten Norm $\|\cdot\|_q : E/N_q \to [0,\infty)$.*

Beweis. (a) rechnet man elementar nach.

(b) Sind $x, y \in E$ mit $[x] = [y]$, so ist $x - y \in N_q$ und somit $q(x) = q((x-y)+y) \le q(x-y) + q(y) = q(y)$. Durch Vertauschung der Rollen von x und y sieht man, daß auch $q(y) \le q(x)$ und daher $q(x) = q(y)$ gelten muß. $\|\cdot\|_q$ ist also wohldefiniert. Die Normeigenschaften (N1)-(N3) rechnet man nun leicht nach. □

1.6. Satz. *Sei F ein Untervektorraum eines normierten $\mathbb{K}$–Vektorraums $(E,\|\cdot\|)$. Für alle $x \in E$ definieren wir*

$$q_F(x) := \operatorname{dist}(x,F) = \inf_{y\in F} \|x-y\| = \inf_{y\in F} \|x+y\| \,.$$

(a) *q_F ist eine Halbnorm auf E mit $N_{q_F} = \overline{F}$.*

(b) *Genau dann definiert $\|[x]\|_{E/F} := q_F(x)$ für $[x] = x + F \in E/F$, $x \in E$, also eine Norm auf E/F, wenn F abgeschlossen ist.*

(c) *Ist $(E,\|\cdot\|)$ vollständig und F abgeschlossen, so ist auch $(E/F,\|\cdot\|_{E/F})$ vollständig.*

Beweis. (a) Für alle $x, y \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

$$q_F(\lambda x) = \inf_{u\in F} \|\lambda x + u\| = \inf_{v\in F} \|\lambda(x+v)\| = |\lambda| \inf_{v\in F} \|x+v\| = |\lambda| q_F(x)$$

sowie

$$\begin{aligned} q_F(x+y) &= \inf_{u\in F} \|x+y+u\| = \inf_{v_1,v_2\in F} \|x+v_1+y+v_2\| \le \\ &\le \inf_{v_1,v_2\in F} \big(\|x+v_1\| + \|y+v_2\|\big) = \inf_{v_1\in F} \|x+v_1\| + \inf_{v_2\in F} \|y+v_2\| = q_F(x) + q_F(y) \,. \end{aligned}$$

q_F ist also eine Halbnorm auf E.

Genau dann ist $q_F(x) = 0$, wenn eine Folge $(u_n)_{n=1}^\infty$ in F existiert mit $\|x - u_n\| \to 0$ für $n \to \infty$, d.h. genau dann, wenn x in der Abschließung von F liegt.

(b) folgt nun folgt nun mit (a) und Lemma 1.5

(c) Nach Lemma 1.3 (e) genügt es zu zeigen, daß jede absolutkonvergente Reihe einen Grenzwert in E/F besitzt. Sei also $(x_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge aus E mit

$$C := \sum_{n=1}^\infty \|[x_n]\|_{E/F} = \sum_{n=1}^\infty q_F(x_n) < \infty \,.$$

Nach Definition von q_F gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $u_n \in F$ mit

$$q_F(x_n) \le \|x_n + u_n\| < q_F(x_n) + 2^{-n} \,.$$

Also ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n + u_n\| \le \sum_{n=1}^{\infty} (q_F(x_n) + 2^{-n}) \le C + 1 < \infty\,.$$

Da E vollständig ist, gibt es ein $s \in E$ mit $s = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}(x_n + u_n)$ in $(E, \|\cdot\|)$. Es folgt

$$\Big\|[s] - \sum_{k=1}^{n}[x_k]\Big\|_{E/F} = \Big\|\Big[s - \sum_{k=1}^{n}(x_k + u_k)\Big]\Big\|_{E/F} \le \Big\|s - \sum_{k=1}^{n}(x_k + u_k)\Big\| \to 0$$

Also konvergiert $\sum_{k=1}^{n}[x_k]$ in $(E/F, \|\cdot\|_{E/F})$ gegen $[s]$ für $n \to \infty$. □

1.7. Lemma. *Seien $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ zwei normierte $\mathbb{K}$-Vektorräume. Für eine lineare Abbildung $T : E \to F$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *T ist auf ganz E stetig.*
(b) *T ist stetig in 0.*
(c) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in E : \qquad \|x\|_E < \delta \Longrightarrow \|Tx\|_F < \varepsilon.$
(d) *Für jede Nullfolge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ in $(E, \|\cdot\|_E)$ ist die Folge $(Tx_n)_{n=1}^{\infty}$ der Bildpunkte eine Nullfolge in $(F, \|\cdot\|_F)$.*
(e) *T ist gleichmäßig stetig auf E.*

Beweis. Die Aussagen (e)$\Longrightarrow$(a)$\Longrightarrow$(b)$\Longleftrightarrow$(c)$\Longleftrightarrow$(d) sind offensichtlich.

"(c)$\Longrightarrow$(e)": Sei also (c) erfüllt und sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Nach Voraussetzung gibt es dann ein $\delta > 0$ mit $\|Tx\|_F < \varepsilon$ für alle $x \in E$ mit $\|x\|_E < \delta$. Für alle $u, v \in E$ mit $\|u - v\| < \delta$ gilt dann wegen der Linearität von T: $\|Tu - Tv\|_F = \|T(u - v)\|_F < \varepsilon$. Also ist T gleichmäßig stetig auf E. □

Sind $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ zwei normierte $\mathbb{K}$-Vektorräume, so bezeichnen wir mit $\mathcal{L}(E, F)$ die Menge aller stetigen linearen Operatoren von E nach F. Statt $\mathcal{L}(E, E)$ schreiben wir auch $\mathcal{L}(E)$ und für die Menge $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ aller stetigen linearen Funktionale schreiben wir E'. E' heißt der *topologische Dualraum* von E. Man rechnet leicht nach, daß $\mathcal{L}(E, F)$ ein Untervektorraum des $\mathbb{K}$–Vektorraums $L(E, F)$ aller linearen Abbildungen von E nach F ist. Hierbei ist $L(E, F)$ mit den punktweisen Operationen der Addition und der Multiplikation mit Skalaren versehen. Insbesondere ist E' Untervektorraum des *algebraischen Dualraums* $E^{\#} := L(E, \mathbb{K})$. Da die Hintereinanderausführung stetiger Abbildungen stetig ist, ist $\mathcal{L}(E)$ eine Unteralgebra der $\mathbb{K}$–Algebra $L(E)$ aller linearen Operatoren von E in sich.

1.8. Lemma. *Seien $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ zwei normierte $\mathbb{K}$-Vektorräume. Für $T \in L(E, F)$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *T ist auf E stetig.*
(b) $\sup\limits_{x \in B_E} \|Tx\|_F < \infty.$
(c) $\sup\limits_{\|x\|_E = 1} \|Tx\|_F < \infty.$
(d) $\sup\limits_{0 \neq x \in E} \dfrac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} < \infty.$

Die Suprema in (b), (c) und (d) stimmen überein. Für $T \in \mathcal{L}(E, F)$ schreiben wir

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} := \sup_{x \in B_E} \|Tx\|_F$$

und nennen $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ die Operatornorm von T. Sind die normierten Räume vom Zusammenhang her klar, so schreiben wir auch $\|T\|$ statt $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}$.

Die Stetigkeit von T in diesem Lemma ist also äquivalent zur Beschränktheit von T auf B_E. Man nennt daher stetige lineare Operatoren auch beschränkt. In der Literatur wird auch die Bezeichnung $\mathcal{B}(E,F)$ für $\mathcal{L}(E,F)$ verwendet.

Beweis. Wegen

$$\frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} = \Big\|T\Big(\frac{1}{\|x\|_E}x\Big)\Big\|_F \quad \text{und} \quad \Big\|\frac{1}{\|x\|_E}x\Big\|_E = 1$$

für alle $0 \neq x \in E$ sieht man unmittelbar, daß die Suprema in (c) und (d) übereinstimmen. Der Ausdruck in (b) ist offensichtlich größer oder gleich dem in (c) bzw. (d). Für $0 \neq x \in B_E$ ist $\|Tx\|_F \leq \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}$. Damit folgt, daß die drei Ausdrücke in (b), (c) und (d) übereinstimmen. Zu zeigen ist also nur die Äquivalenz von (a) und (b).

"(a)$\Longrightarrow$(b)": Ist $T \in \mathcal{L}(E,F)$, so gibt es nach Lemma 1.7 zu $\varepsilon := 1$ ein $\delta > 0$, so daß $\|Tu\|_F < 1$ für alle $u \in E$ mit $\|u\|_E < \delta$. Für alle $x \in B_E$ folgt dann

$$\|Tx\|_F = \frac{2}{\delta}\Big\|T\Big(\frac{\delta}{2}x\Big)\Big\|_F < \frac{2}{\delta}\,.$$

Also ist $\sup_{x\in B_E} \|Tx\|_F \leq \frac{2}{\delta}$.

"(b)$\Longrightarrow$(a)": Sei nun (b) erfüllt und sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Mit $\delta := \frac{\varepsilon}{1+\|T\|}$ folgt für alle $x \in E$ mit $\|x\|_E < \delta$:

$$\|Tx\|_F = \delta\Big\|T\Big(\frac{1}{\delta}x\Big)\Big\|_F \leq \delta\|T\| = \varepsilon\frac{\|T\|}{\|T\|+1} < \varepsilon\,.$$

Nach Lemma 1.7 ist T also stetig auf E. □

Der Beweis des folgenden Lemmas ist eine leichte Übungsaufgabe.

1.9. Lemma. *Seien $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ zwei normierte $\mathbb{K}$-Vektorräume. Mit der in 1.8 eingeführten Operatornorm $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ gilt:*

(a) *$(\mathcal{L}(E,F), \|\cdot\|)$ ist ein normierter $\mathbb{K}$–Vektorraum.*
(b) *Ist $(F, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, so auch $(\mathcal{L}(E,F), \|\cdot\|)$.*
(c) *Ist $(G, \|\cdot\|_G)$ ein weiterer normierter Raum, so gilt für alle $T \in \mathcal{L}(E,F)$, $S \in \mathcal{L}(F,G)$: Es ist $ST := S \circ T \in \mathcal{L}(E,G)$ und $\|ST\|_{\mathcal{L}(E,G)} \leq \|S\||_{\mathcal{L}(F,G)}\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}$.*

Insbesondere ist für alle normierten $\mathbb{K}$–Vektorräume $(E, \|\cdot\|_E)$ der topologische Dualraum E' versehen mit der Norm $\|\cdot\|_{E'} := \|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,\mathbb{K})}$ ein Banachraum.

Mit $E = F = G$ folgt aus (c), daß $\mathcal{L}(E)$, versehen mit der Operatornorm, eine normierte Algebra ist (sogar eine Banachalgebra, falls $(E, \|\cdot\|_E)$. vollständig ist).

Die stetigen linearen Funktionale auf einem normierten Raum lassen sich auch wie folgt charakterisieren:

1.10. Lemma. *Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{K}$–Vektorraum. Für ein nicht identisch verschwindendes, lineares Funktional $f : E \to \mathbb{K}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *f ist stetig.*
(b) *$\ker f := \{x \in E\,;\, f(x) = 0\}$ ist abgeschlossen in E.*
(c) *$\ker f$ ist nicht dicht in E.*
(d) *Es gibt eine Nullumgebung U, für die die Menge $f(U)$ in $\mathbb{K}$ beschränkt ist.*

Beweis. "(a)$\Longrightarrow$(b)": Ist f stetig, so ist $\ker f = f^{-1}(\{0\})$ als Urbild der abgeschlossenen Menge $\{0\}$ unter der stetigen Abbildung f abgeschlossen in $(E, \|\cdot\|)$.

Die Implikation (b)$\Longrightarrow$(c) ist offensichtlich.

"(c)$\Longrightarrow$(d)": Ist $\ker f$ nicht dicht in E, so gibt es ein $x \in E$ und ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \cap \ker f = \emptyset$. Ist $v \in E$ mit $|f(v)| > |f(x)|$, so ist $x - \frac{f(x)}{f(v)}v \in \ker f$ und daher

$\frac{f(x)}{f(v)}v \notin U_\varepsilon(0)$ (beachte $U_\varepsilon(x) \cap \ker f = \emptyset$ und $U_\varepsilon(x) = x + U_\varepsilon(0) = \{x+u\,;\, u \in U_\varepsilon(0)\}$). Wegen $\left|\frac{f(x)}{f(v)}\right| < 1$ ist dann auch v kein Element von $U_\varepsilon(0)$. Für alle $v \in U_\varepsilon(0)$ muß also $|f(v)| \leq |f(x)|$ gelten. $f(U_\varepsilon(x))$ ist somit eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{K}$.

"(d)$\Longrightarrow$(a)": Sei nun (d) erfüllt und sei U eine Umgebung von 0, für die $f(U)$ beschränkt in $\mathbb{K}$ ist. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(0) \subseteq U$. Für alle $x \in B_E$ ist $\frac{\varepsilon}{2}x \in U_\varepsilon(0)$. Es folgt

$$\sup_{x\in B_E} |f(x)| = \sup_{x \in B_E} \frac{2}{\varepsilon}\Big|f\Big(\frac{\varepsilon}{2}x\Big)\Big| \leq \frac{2}{\varepsilon} \sup_{v\in U} |f(v)| < \infty\,.$$

Nach Lemma 1.8 ist f also stetig auf E. □

Sind (X,d) und (Y,δ) zwei metrische Räume, so nennt man bekanntlich eine Abbildung $f : X \to Y$, die die Abstände erhält, d.h. $\delta(f(u), f(v)) = d(u,v)$ für alle $u, v \in X$ erfüllt, eine *Isometrie*. Die metrischen Räume (X,d) und (Y,δ) heißen zueinander *isometrisch*, falls es eine bijektive Isometrie f von X auf Y gibt. Dann ist auch $f^{-1} : Y \to X$ wieder eine Isometrie. Die beiden metrischen Räume unterscheiden sich dann nicht in ihrer metrischen Struktur und sind insbesondere zueinander homöomorph. Sind (X,d) und (Y,δ) zueinander isometrisch, so schreiben wir $(X,d) \cong (Y,\delta)$. Man rechnet nach, daß $\cong$ eine Äquivalenzrelation ist.

Sind nun $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ zwei normierte Räume, so ist eine lineare Abbildung $T : E \to F$ genau dann eine Isometrie, wenn $\|Tx\|_F = \|x\|_E$ für alle $x \in E$ gilt. Eine bijektive lineare Isometrie nennen wir auch einen *isometrischen Isomorphismus.* $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ heißen zueinander *isometrisch isomorph*, falls es einen isometrischen Isomorphismus von X auf Y gibt. Wir schreiben dann auch wieder $(E, \|\cdot\|_E) \cong (F, \|\cdot\|_F)$. Zueinander isometrisch isomorphe normierte Räume unterscheiden sich weder in ihrer linearen, noch in ihrer metrischen Struktur und werden als im Rahmen der Theorie normierter Räume als nicht wesentlich verschieden angesehen.

Eine lineare Abbildung $T : E \to F$ heißt ein *topologischer Isomorphismus*, falls T bijektiv (und damit ein $\mathbb{K}$–Vektorraumisomorphismus) ist und T und T^{-1} stetig sind. In diesem Fall sagen wir: $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ sind zueinander *topologisch isomorph.* Wir schreiben dann $(E, \|\cdot\|_E) \simeq (F, \|\cdot\|_F)$. Man rechnet nach, daß $\simeq$ ebenfalls eine Äquivalenzrelation ist. Zueinander topologisch isomorphe normierte Räume $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ unterscheiden sich weder in ihrer linearen noch in ihrer topologischen Struktur. So ist eine Folge $(x_n)_{n=1}^\infty$ in E genau dann eine Cauchy–Folge (bzw. konvergent) in E, wenn $(Tx_n)_{n=1}^\infty$ in E eine Cauchy–Folge (bzw. konvergent) ist. $(E, \|\cdot\|_E)$ ist genau dann vollständig, wenn $(F, \|\cdot\|_F)$ es ist.

Mit Hilfe von Lemma 1.8 zeigen wir nun die folgende Charakterisierung der topologischen Isomorphismen:

1.11. Satz. *Seien $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ zwei normierte Räume. Eine lineare Abbildung $T : E \to F$ ist genau dann ein topologischer Isomorphismus, wenn es Konstanten $c > 0$ und $C > 0$ gibt, so daß für alle $x \in E$ gilt*

$$c\|x\|_E \leq \|Tx\|_F \leq C\|x\|_E\,. \tag{1.1}$$

Beweis. Ist $T : R \to F$ ein toplogischer Isomorphismus, so ist $T \in \mathcal{L}(E,F)$ und $T^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$ sowie (im Fall $E \neq \{0\}$) $\|T\| > 0$ und $\|T^{-1}\| > 0$. Die Ungleichungen (1.1) sind dann erfüllt mit $c = \|T^{-1}\|^{-1}$ und $C = \|T\|$. Gilt umgekehrt (1.1) für alle $x \in E$, so folgt nach Lemma 1.8 die Stetigkeit von T und von T^{-1} sowie $\|T\| \leq C$ und $\|T^{-1}\| \leq \frac{1}{c}$. □

1.12. Definition. Zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ auf einem $\mathbb{K}$–Vektorraum E heißen *äquivalent*, falls es Konstanten $c > 0$ und $C > 0$ gibt, so daß für alle $x \in E$ gilt

$$c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1 \,. \tag{1.2}$$

Nach Satz 1.11 ist dies genau dann der Fall, wenn die Identität ein topologischer Isomorphismus von $(E, \|\cdot\|_1)$ auf $(E, \|\cdot\|_2)$ ist. Äquivalente Normen auf einem $\mathbb{K}$–Vektorraum E definieren die gleiche Topologie auf E.

1.13. Satz. *Jeder normierte $\mathbb{K}$–Vektorraum $(E, \|\cdot\|)$ der endlichen Dimension* $\dim E = N < \infty$ *ist topologisch isomorph zu* $(\mathbb{K}^N, |\cdot|)$.

Beweis. Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion nach N. Für $N = 0$ ist die Behauptung trivial. Sei nun schon gezeigt, daß die Behauptung für ein $N \in \mathbb{N}_0$ gilt, und sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{K}$–Vektorraum der Dimension $N + 1$. Wir fixieren eine Basis $e_0, \ldots, e_N$ von E und definieren lineare Funktionale $\varphi_j : E \to \mathbb{K}$ durch $\varphi_k(x) = a_k$ für alle $x = \sum_{j=0}^N a_j e_j \in E$, $a_0, \ldots, a_N \in \mathbb{K}$, $k = 0, \ldots, N$. Dann hat für $k = 0, \ldots, N$ der Untervektorraum

$$E_k := \ker \varphi_k = \mathrm{LH}\{e_j \,;\, 0 \leq j \leq N, j \neq k\}$$

die Dimension N. Nach Induktionsvoraussetzung ist $(E_k, \|\cdot\|\big|_{E_k})$ also topologisch isomorph zu $(\mathbb{K}^N, |\cdot|)$ und damit insbesondere vollständig, also nach Lemma 1.3 abgeschlossen in $(E, \|\cdot\|)$, $k = 0, \ldots, N$. Insbesondere sind die Funktionale $\varphi_0, \ldots, \varphi_N$ nach Lemma 1.10 stetig. Die durch

$$\Phi(x) := (\varphi_0(x), \ldots, \varphi_N(x))\,, \qquad (x \in E)$$

definierte Abbildung $\Phi : E \to \mathbb{K}^{N+1}$ ist offensichtlich ein $\mathbb{K}$-Vektorraumisomorphismus. Für alle $x \in B_E$ gilt

$$|\Phi(x)| = \Big(\sum_{j=0}^N |\varphi_j(x)|^2\Big)^{1/2} \leq \sqrt{N+1} \max_{0 \leq j \leq N} \|\varphi_j\| \,.$$

Φ ist also nach Lemma 1.8 stetig. Die inverse Abbildung $\Phi^{-1} : \mathbb{K}^{N+1} \to E$ ist gegeben durch

$$\Phi^{-1}\big((a_j)_{j=0}^N\big) = \sum_{j=0}^N a_j e_j \,, \qquad (a_j)_{j=0}^N \in \mathbb{K}^{N+1}.$$

Unter Verwendung der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung erhalten wir:

$$\begin{aligned}\sup_{a \in B_{\mathbb{K}^{N+1}}} \big\|\Phi^{-1}(a)\big\| &= \sup_{(a_j)_{j=0}^N \in B_{\mathbb{K}^{N+1}}} \Big\|\sum_{j=0}^N a_j e_j\Big\| \leq \sup_{(a_j)_{j=0}^N \in B_{\mathbb{K}^{N+1}}} \sum_{j=0}^N |a_j| \cdot \|e_j\| \leq \\ &\leq \Big(\sum_{j=0}^N \|e_j\|^2\Big)^{1/2} < \infty \,.\end{aligned}$$

Also ist auch Φ^{-1} stetig, und Φ ist ein topologischer Isomorphismus. □

1.14. Folgerungen. (a) *Je zwei normierte $\mathbb{K}$–Vektorräume der Dimension $N < \infty$ sind zueinander topologisch isomorph.*

(b) *Je zwei Normen auf einem endlich dimensionalen $\mathbb{K}$–Vektorraum E definieren die gleiche Topologie auf E.*

(c) *Jeder endlich dimensionale $\mathbb{K}$–Vektorraum ist vollständig.*

(d) *Jeder endlich dimensionale Unterraum eines normierten $\mathbb{K}$–Vektorraums E ist abgeschlossen in E.*

(e) *In einem normierten, endlich dimensionalen* $\mathbb{K}$*–Vektorraum* $(E, \|\cdot\|_E)$ *ist eine Teilmenge* $M \subset E$ *genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist. Insbesondere ist die abgeschlossene Einheitskugel* $B_E := \{x \in E\,;\, \|x\|_E \leq 1\}$ *kompakt.*

In unendlich dimensionalen normierten Räumen ist die Aussage (e) falsch. Bevor wir dies beweisen, zeigen wir:

1.15. Lemma (Riesz). *Sei* $(E, \|\cdot\|)$ *ein normierter* $\mathbb{K}$*–Vektorraum und sei* $F \subsetneq E$ *ein echter abgeschlossener Unterraum von* E*. Dann gibt es zu jedem* $\varepsilon \in (0,1)$ *ein* $x \in E \setminus F$ *mit* $\|x\| = 1$ *und* $\operatorname{dist}(x,F) := \inf_{y\in F} \|x-y\| \geq \varepsilon$*.*

Beweis. Wegen $F \neq E$ gibt es ein $u \in E \setminus F$. Da F abgeschlossen ist gilt $d := \operatorname{dist}(u,F) = \inf_{y\in F}\|u-y\| > 0$. Zu $\varepsilon \in (0,1)$ gibt es dann ein $\delta > 0$ mit $\varepsilon \leq \frac{d}{d+\delta}$. Zu diesem $\delta > 0$ gibt es ein $y_\delta \in F$ mit $d \leq \|u - y_\delta\| < d + \delta$. Mit

$$x := \frac{1}{\|u-y_\delta\|}(u-y_\delta)$$

gilt dann $\|x\| = 1$. Für alle $v \in F$ ist $y_\delta + \|u-y_\delta\|v \in F$ und somit

$$\|x-v\| = \Big\| \frac{1}{\|u-y_\delta\|}(u-y_\delta) - v \Big\| = \frac{\big\|u - y_\delta - \|u-y_\delta\|v\big\|}{\|u-y_\delta\|} \geq \frac{d}{d+\delta} > \varepsilon\,.$$

Also ist $\operatorname{dist}(x,F) := \inf_{v\in F}\|x-v\| \geq \varepsilon$. □

1.16. Folgerung. *Für einen normierten* $\mathbb{K}$*–Vektorraum* $(E;\|\cdot\|)$ *sind die folgenden drei Aussagen äquivalent:*

(a) E *ist endlich dimensional.*
(b) E *ist lokalkompakt, d.h. jeder Punkt in* E *besitzt wenigstens eine kompakte Umgebung.*
(c) $B_E = \{x \in E\,;\, \|x\| \leq 1\}$ *ist kompakt.*

Beweis. " (a)$\Longrightarrow$(b)": Ist $\dim E = N < \infty$, so ist $(E;\|\cdot\|)$ topologisch isomorph zu $(\mathbb{K}^N, |\cdot|)$ und damit lokalkompakt.

" (b)$\Longrightarrow$(c)": Sei $(E;\|\cdot\|)$ lokalkompakt. Dann gibt es eine kompakte Umgebung U von 0. Zu U gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B(0,\varepsilon) := \{x \in E\,;\, \|x\| \leq \varepsilon\} \subseteq U$. Da die Norm $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ stetig ist, ist $B(0,\varepsilon) = \|\cdot\|^{-1}([0,\varepsilon])$ abgeschlossene Teilmenge von U und damit ebenfalls kompakt. Nun ist die Abbildung $x \mapsto \frac{1}{\varepsilon}x$ eine Homöomorphie von $(E,\|\cdot\|)$ auf sich. Also ist $B_E = \frac{1}{\varepsilon}B(0,\varepsilon)$ ebenfalls kompakt.

" (c)$\Longrightarrow$(a)": Wir zeigen: Ist $\dim E = \infty$, so ist B_E zwar abgeschlossen und beschränkt aber *nicht* kompakt. Wegen $\dim E = \infty$ gibt es ein $x_1 \in E$ mit $\|x_1\| = 1$. Sind nun schon für ein $n \in \mathbb{N}$ Elemente $x_1, \ldots, x_n \in E$ konstruiert mit

$$\|x_j\| = 1 \quad \text{und} \quad \|x_j - x_k\| \geq \frac{1}{2} \quad \text{für alle } j,k \in \{1,\ldots,n\} \text{ mit } j \neq k,$$

so ist $Y_n := \mathrm{LH}\{x_1,\ldots,x_n\}$ als endlich dimensionaler Untervektorraum von E nach Folgerung 1.14 abgeschlossen in E und echte Teilmenge von E. Nach dem Lemma von Riesz 1.15 gibt es also ein Element $x_{n+1} \in E \setminus Y_n$ mit $\|x_{n+1}\| = 1$ und $\operatorname{dist}(x_{n+1}, Y_n) \geq \frac{1}{2}$. Damit haben wir induktiv eine Folge $(x_n)_{n=1}^\infty$ in B_E konstruiert mit $\|x_n\| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und mit $\|x_n - x_k\| \geq \frac{1}{2}$ für alle $n,k \in \mathbb{N}$ mit $k \neq n$. Da diese Folge keine konvergente Teilfolge besitzt, kann B_E nicht kompakt sein. □

In den Übungen (Aufgabe 1.9) wird gezeigt, daß es zu jedem normierten $\mathbb{K}$–Vektorraum $(E,\|\cdot\|)$ einen Banachraum $(F,\|\cdot\|_F)$ und eine lineare Isometrie $J : E \to F$ so gibt, daß $J(F)$ dicht in F liegt. $(F,\|\cdot\|_F)$ heißt dann *Vervollständigung* von $(E,\|\cdot\|)$. Wir zeigen nun, daß diese bis auf einen isometrischen Isomorphismus eindeutig bestimmt ist:

1.17. Satz. *Sei* $(E, \|\cdot\|)$ *ein normierter* $\mathbb{K}$*–Vektorraum. Sind* $(F_1, \|\cdot\|_1)$ *und* $(F_2, \|\cdot\|_2)$ *zwei Banachräume und* $J_1 : E \to F_1$, $J_2 : E \to F_2$ *zwei lineare Isometrien, für die* $J_j(E)$ *in* F_j *dicht liegt für* $j = 1, 2$, *so gibt es einen isometrischen Isomorphismus* $V : F_1 \to F_2$ *mit* $VJ_1x = J_2x$ *für alle* $x \in E$.

Beweis. Zu jedem $u \in F_1$ gibt es nach Voraussetzung eine Folge $(x_n)_{n=1}^\infty$ in E mit $J_1x_n \to u$ in $(F_1, \|\cdot\|_1)$ für $n \to \infty$. Dann sind $(x_n)_{n=1}^\infty$ und damit auch $(J_2x_n)_{n=1}^\infty$ Cauchyfolgen in $(E, \|\cdot\|)$ bzw. $(F_2, \|\cdot\|_2)$. Da $(F_2, \|\cdot\|_2)$ vollständig ist existiert also $Vu := \lim_{n\to\infty} J_2x_n$ in F_2. Man rechnet leicht nach, daß Vu unabhängig von der speziell gewählten Folge $(x_n)_{n=1}^\infty$ mit $J_1x_n \to u$ ist und daß die so definierte Abbildung $V : F_1 \to F_2$ linear ist. Wegen der Stetigkeit der Normen gilt weiter

$$\|Vu\|_2 = \lim_{n\to\infty} \|J_2x_n\|_2 = \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \lim_{n\to\infty} \|J_1x_n\|_1 = \|u\|_1 .$$

Ist schließlich $v \in F_2$ beliebig, so gibt es auch eine Folge $(y_n)_{n=1}^\infty$ in E mit $J_2y_n \to v$ in F_2 für $n \to \infty$. Da J_1, J_2 lineare Isometrien sind, ist dann wie oben $(J_1y_n)_{n=1}^\infty$ Cauchyfolge in $(F_1, \|\cdot\|_1)$, also gegen ein $u \in F_1$ konvergent. Es folgt $Vu = v$. Also ist V auch surjektiv und damit ein isometrischer Isomorphismus. □

Übungsaufgaben zu Kapitel 1. Eine auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definierte reellwertige Funktion heißt bekanntlich *konvex*, falls für alle $x, y \in I$ und alle $\alpha \in [0, 1]$ gilt:

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \le \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) .$$

Die Funktion f heißt *strikt konvex*, falls für alle $x, y \in I$ und alle $\alpha \in (0, 1)$ gilt:

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) < \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) .$$

Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt *konkav* (bzw. *strikt konkav*), falls die Funktion $-f$ konvex (bzw. strikt konvex) ist.

1.1. Aufgabe. Zeigen Sie: Ist $f \in C^2(I)$ mit $f''(x) \ge 0$ (bzw. $f''(x) > 0$) für alle $x \in I$, so ist f konvex (bzw. strikt konvex).

1.2. Aufgabe. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Zeigen Sie:

(a) Für alle $x_1, \dots, x_n \in I$ und alle $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0, 1]$ mit $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$ gilt die *Jensensche Ungleichung*:

$$f\big(\alpha_1x_1 + \cdots + \alpha_nx_n\big) \le \alpha_1f\big(x_1\big) + \cdots + \alpha_nf\big(x_n\big) . \tag{1.3}$$

(b) Ist f strikt konvex und sind $\alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$ mit $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$, so gilt in (1.3) genau dann das Gleichheitszeichen, wenn $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ ist.

1.3. Aufgabe. Sei $p > 1$, $p' := \frac{p}{p-1}$ und $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_N) \in (0, \infty)^N$. Zeigen Sie: Für alle $(a_1, \dots, a_N), (b_1, \dots, b_N) \in \mathbb{K}^N$ $(\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C})$ gilt:

(a) $$\Big|\sum_{j=1}^N a_jb_j\omega_j\Big| \le \sum_{j=1}^N |a_jb_j|\omega_j \le \Big(\sum_{j=1}^N |a_j|^p\omega_j\Big)^{1/p}\Big(\sum_{j=1}^N |b_j|^{p'}\omega_j\Big)^{1/p'},$$

(b) $$\Big(\sum_{j=1}^N |a_j + b_j|^p\omega_j\Big)^{1/p} \le \Big(\sum_{j=1}^N |a_j|^p\omega_j\Big)^{1/p} + \Big(\sum_{j=1}^N |b_j|^p\omega_j\Big)^{1/p}.$$

Wann gilt in diesen beiden Ungleichungen das Gleichheitszeichen?

Hinweis: Man beachte für (a), daß die Funktion $x \mapsto x^{p'}$ strikt konvex und für (b), daß die Funktion $x \mapsto \big(1 + x^{1/p}\big)^p$ strikt konkav auf $(0, \infty)$ ist.

1.4. Aufgabe. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige konvexe Funktion und $g \in C([a, b])$ mit $g([a, b]) \subset I$ und $b - a = 1$. Zeigen Sie:

$$f\left(\int_a^b g(x)dx\right) \leq \int_a^b f(g(x))dx\,.$$

1.5. Aufgabe. Seien $x_1, \dots, x_n \in [0, \infty)$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$ mit $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$. Beweisen Sie die Ungleichung für die gewichteten arithmetischen und geometrischen Mittel:

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \geq x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

Zeigen Sie, daß das Gleichheitszeichen hierbei genau dann gilt, wenn $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ ist.

1.6. Aufgabe. Führen Sie die Vollständigkeitsbeweise zu den Beispielen in 1.4 aus.

1.7. Aufgabe. Führen Sie den Beweis zu Lemma 1.9 aus.

1.8. Aufgabe. Sei $(E, \|\cdot\|_E)$ ein normierter Raum und sei $F \subsetneq E$ ein abgeschlossener Unterraum von E. Zeigen Sie, daß der kanonische Epimorphismus $\pi : E \to E/F$ stetig ist und berechnen Sie $\|\pi\|_{\mathcal{L}(E,E/F)}$.

1.9. Aufgabe. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. Mit $c(X)$ sei die Menge aller Cauchy-Folgen in X bezeichnet, mit $c_0(X)$ die aller Nullfolgen in X.

(a) Zeigen Sie, daß $c(X)$ ein normierter Raum ist bezüglich der sup-Norm und daß $c_0(X)$ ein abgeschlossener Untervektorraum davon ist.
(b) Zeigen Sie, daß die Quotientennorm auf $\widehat{X} := c(X)/c_0(X)$ gegeben ist durch $\|(x_n)_n + c_0(X)\|_Q = \limsup_{n\to\infty} \|x_n\|$.
(c) Zeigen Sie, daß $(\widehat{X}, \|\cdot\|_Q)$ vollständig ist.
(d) Betten Sie X isometrisch in $\widehat{X}$ ein und zeigen Sie, daß X durch diese Einbettung dichter Teilraum von $\widehat{X}$ ist.

1.10. Aufgabe. (Bergman–Räume) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei $1 \leq p < \infty$. Der *Bergman–Raum* $A^p(G)$ sei der Raum aller auf G holomorphen Funktionen f auf G, für die gilt

$$\|f\|_p := \Big(\int_G |f(z)|^p d\lambda(z)\Big)^{1/p} < \infty\,.$$

Hierbei sei λ daß ebene Lebesguemaß.

(a) Mit $\delta(z) := \inf\{|z - w|,\, w \notin G\} \in (0, \infty]$ für alle $z \in G$ gilt für $f \in A^p(G)$, $z \in G$ und $0 < R < \delta(z)$

$$(i)\ f(z) = \frac{1}{\pi R^2}\int_{|z-\zeta|<R} f(\zeta)\, d\lambda^2(\zeta), \quad (ii)\ |f(z)| \leq \frac{1}{(\pi\delta(z)^2)^{1/p}}\|f\|_{A^p(G)}.$$

(b) $(A^p(G), \|\cdot\|_p)$ ist ein Banachraum.

1.11. Aufgabe. (Hardy-Räume) Sei $\mathbb{D}$ die offene Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$. Der *Hardy-Raum* $H^2(\mathbb{D})$ ist definiert als

$$H^2(\mathbb{D}) := \Big\{f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})|\ \sup_{0\leq r<1} \|f\|_{H^2(\mathbb{D})} := \Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2\, dt\Big)^{1/2} < \infty\Big\}.$$

Zeigen Sie:

(a) $\|f\|_{H^2(\mathbb{D})} := \sup_{0\leq r<1} \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2\, dt}$ ist eine Norm auf $H^2(\mathbb{D})$.

(b) Ist $f(z) = \sum_{k=0}^\infty a_k z^k$ eine Funktion in $\mathcal{O}(\mathbb{D})$, dann ist $f \in H^2(\mathbb{D})$ genau dann, wenn $\sum_{k=0}^\infty |a_k|^2 < \infty$ ist und in diesem Fall ist $\|f\|^2_{H^2(\mathbb{D})} = \sum_{k=0}^\infty |a_k|^2$. (*Hinweis: Cauchy-Produkt von Reihen.*)

(c) Folgern Sie aus b) die Vollständigkeit von $(H^2(\mathbb{D}), \|\cdot\|_{H^2(\mathbb{D})})$.

(d) Zu jedem $z_0 \in \mathbb{D}$ existiert ein $C(z_0) > 0$, so daß $|f(z_0)| \leq C(z_0)\|f\|_{H^2(\mathbb{D})}$ für alle $f \in H^2(\mathbb{D})$.

1.12. Aufgabe. Ein metrischer Raum E heißt *separabel*, wenn er eine abzählbar dichte Teilmenge besitzt, d.h. falls es eine abzählbare Teilmenge A in E gibt, so daß jedes Element von E Grenzwert einer Folge von Elementen aus A ist.

Sei I eine nicht leere Menge und bezeichne $\ell^\infty(I)$ die Menge aller beschränkten Familien $x = (x_i)_{i\in I}$ mit $x_i \in \mathbb{C}$ für alle $i \in I$. $c_0(I)$ sei die Menge aller $x = (x_i)_{i\in I} \in \ell^\infty(I)$, für die zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Teilmenge J von I existiert mit $|x_j| < \varepsilon$ für alle $j \in I \setminus J$.

(a) Zeigen Sie, daß $c_0(I)$ ein abgeschlossener Untervektorraum von $\ell^\infty(I)$ ist, der genau dann separabel ist, wenn I höchstens abzählbar ist.

(b) Zeigen Sie, daß $\ell^\infty(I)$ genau dann separabel ist, wenn I endlich ist.
(*Hinweis: Indirekter Beweis!*)

1.13. Aufgabe. Sei $X := C([0,1])$ der Banachraum der auf $[0,1]$ stetigen komplexwertigen Funktionen versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$. Sei V der durch

$$(Vf)(t) := \int_0^t f(s)ds \qquad f \in X, t \in [0,1],$$

definierte Operator auf X.

(a) Zeigen Sie $V \in \mathcal{L}(X)$ und berechnen Sie $\|V^n\|$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
(b) Zeigen Sie $\rho(V) := \{z \in \mathbb{C}\,;\, (zI - V)^{-1} \text{ existiert in } \mathcal{L}(X)\} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und geben Sie $(zI - V)^{-1}$ für alle $0 \neq z \in \mathbb{C}$ an.

1.14. Aufgabe. Sei X ein normierter Raum. Zeigen Sie, daß zu jedem endlichdimensionalen Untervektorraum Y von X und jedem Punkt $x \in X$ ein $y \in Y$ existiert mit $\|x - y\| = \inf\{\|x - z\|,\, z \in Y\}$. Zeigen Sie am Beispiel $(X, \|\cdot\|) = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$, daß diese *Bestapproximation* im allgemeinen nicht eindeutig ist.

KAPITEL 2

Elementare Hilbertraumtheorie

In diesem Abschnitt wird eine kurze Einführung in die Hilbertraumtheorie gegeben. Im folgenden stehe $\mathbb{K}$ stets für den Körper der reellen oder den der komplexen Zahlen.

2.1. Definition. Ein $\mathbb{K}$–Vektorraum $\mathcal{H}$ heißt *Prä–Hilbertraum*, falls $\mathcal{H}$ mit einem *Skalarprodukt* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ versehen ist, das ist eine Abbildung

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathcal{H}\times\mathcal{H}\to\mathbb{K}$$

mit den folgenden Eigenschaften:

(S1) Für alle $x\in\mathcal{H}$ ist $\langle x,x\rangle$ reell und nicht negativ. Es ist $\langle x,x\rangle = 0$ genau dann, wenn $x=0$.

(S2) Für alle $u\in\mathcal{H}$ ist die Abbildung $x\mapsto\langle x,u\rangle$ linear, d.h. es gilt:

$$\forall x,y\in\mathcal{H}\,\forall\alpha,\beta\in\mathbb{K}: \quad \langle\alpha x+\beta y,u\rangle = \alpha\langle x,u\rangle+\beta\langle y,u\rangle\,.$$

(S3) $\forall x,y\in\mathcal{H}: \quad \langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$.

2.2. Bemerkungen. **(a)** Ist $\mathbb{K}$ der Körper der reellen Zahlen, so kann man den Querstrich in (S3) weglassen.

(b) Aus den Eigenschaften (S2) und (S3) des Skalarproduktes ergibt sich

(S4) $\forall x,u,v\in\mathcal{H}\,\forall\alpha,\beta\in\mathbb{K}: \quad \langle x,\alpha u+\beta v\rangle=\bar\alpha\langle x,u\rangle+\bar\beta\langle x,v\rangle\,.$

Für alle $x\in\mathcal{H}$ ist also die Abbildung $\langle x,\cdot\rangle:\mathcal{H}\to\mathbb{K}$ konjugiert linear (im Fall $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ also sogar linear).

2.3. Beispiele. (a) Versehen mit dem durch

$$\langle x,y\rangle := \sum_{j=1}^{N} x_j\overline{y_j} \quad \text{für } x=(x_1,\dots,x_N)^t, y=(y_1,\dots,y_N)^t\in\mathbb{K}^N$$

definierten Standardskalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sind die Spaltenvektorräume $\mathbb{R}^N$ und $\mathbb{C}^N$ Prä–Hilberträume (über $\mathbb{R}$ bzw. über $\mathbb{C}$).

(b) $\mathcal{H}:=C([a,b],\mathbb{K})$ (mit $a<b$) ist versehen mit dem durch

$$\langle f,g\rangle := \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt \quad \text{für } f,g\in C([a,b],\mathbb{K})$$

definierten Skalarprodukt ein Prä–Hilbertraum über $\mathbb{K}$.

(c) Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ Lebesgue–meßbar. Dann ist $L^2(\Omega)$ mit dem durch

$$\langle f,g\rangle := \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}\,d\lambda_N(x) \quad \text{für } f,g\in L^2(\Omega)$$

definierten Skalarprodukt ein Prä–Hilbertraum.

(d) Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ offen, $k\in\mathbb{N}$ und sei $\mathcal{D}^k(\Omega)$ der Raum der auf Ω k-mal stetig differenzierbaren $\mathbb{K}$–wertigen Funktionen mit kompaktem Träger in Ω. Dann ist $\mathcal{D}^k(\Omega)$ mit dem durch

$$\langle f,g\rangle := \sum_{|\alpha|\le k}\int_\Omega \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(x)\overline{\frac{\partial^\alpha g}{\partial x^\alpha}(x)}\,d\lambda_N(x) \quad \text{für } f,g\in\mathcal{D}^k(\Omega)$$

definierten Skalarprodukt ein Prä–Hilbertraum.

(e) $\ell^2(I)$ mit dem durch $\langle x,y\rangle := \sum_{i\in I} x_i\overline{y_i}$ für $x=(x_i)_{i\in I}$ und $y=(y_i)_{i\in I}$ aus $\ell^2(I)$. Man beachte hierbei, daß $(x_i\overline{y_i})_{i\in I}$ aufgrund der Hölderschen Ungleichung summierbar ist.

Bemerkung. Ist $(\mathcal{H},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Prä-Hilbertraum und $\mathcal{K}$ ein Untervektorraum, so ist auch $(\mathcal{K},\langle,\cdot,\cdot\rangle|_{\mathcal{K}\times\mathcal{K}})$ wieder ein Prä-Hilbertraum.

Dies rechnet man unmittelbar nach.

2.4. Satz. *Sei $\mathcal{H}$ ein Prä–Hilbertraum über $\mathbb{K}$ mit dem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle:\mathcal{H}\times\mathcal{H}\to\mathbb{K}$ und sei $\|\cdot\|:\mathcal{H}\to[0,\infty)$ definiert durch $\|x\|:=\sqrt{\langle x,x\rangle}$ für alle $x\in\mathcal{H}$.*

(a) *Es gilt die Cauchy–Schwarzsche Ungleichung:*

$$\forall x,y\in\mathcal{H}:\quad |\langle x,y\rangle|\le\|x\|\cdot\|y\|\,. \tag{2.1}$$

Genau dann steht hierbei das Gleichheitszeichen, wenn die Vektoren x und y linear abhängig sind.

(b) *$\|\cdot\|:\mathcal{H}\to[0,\infty)$ ist eine Norm auf $\mathcal{H}$. Diese nennt man die durch $\langle\cdot,\cdot\rangle$ definierte Norm auf $\mathcal{H}$.*

(c) *Es gelten die Parallelogrammgleichung*

$$\forall x,y\in\mathcal{H}:\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right) \tag{2.2}$$

und die Polarisierungsidentität

$$\forall x,y\in\mathcal{H}:\langle x,y\rangle=\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right) \tag{2.3}$$

im Fall $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ bzw.

$$\forall x,y\in\mathcal{H}:\langle x,y\rangle=\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x+iy\|-i\|x-iy\|\right) \tag{2.4}$$

im Fall $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

Beweis. (a) Für $y=0$ und alle $x\in\mathcal{H}$ gilt (unter Verwendung von (S4)): $|\langle x,y\rangle|=|\langle x,0\cdot y\rangle|=|0\cdot\langle x,y\rangle|=0$ und in diesem Fall sind x und y linear abhängig.

Sei also nun $y\neq0$ vorausgesetzt. Nach (S1) ist dann $\|y\|^2=\langle y,y\rangle>0$. Mit

$$\lambda:=\frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$$

folgt unter Verwendung von (S3)

$$\lambda\langle y,x\rangle=\frac{\langle x,y\rangle\overline{\langle x,y\rangle}}{\langle y,y\rangle}=\frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2}$$

und

$$\begin{aligned}0\le\langle x-\lambda y,\,x-\lambda y\rangle=&\langle x,x\rangle-\lambda\langle y,x\rangle-\bar\lambda\langle x,y\rangle+|\lambda|^2\langle y,y\rangle=\\=&\langle x,x\rangle-\frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle}\end{aligned}$$

Multiplikation mit $\langle y,y\rangle$ liefert

$$|\langle x,y\rangle|^2\le\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$$

woraus durch Wurzelziehen (2.1) folgt. Wie man aus der Rechnung sieht, gilt das Gleichheitszeichen in (2.1) genau dann, wenn $\langle x-\lambda y,\,x-\lambda y\rangle=0$, d.h. wenn $x=\lambda y$, d.h. wenn x und y linear abhängig sind.

(b) Die Eigenschaften (N1) und (N2) rechnet man unmittelbar mit Hilfe von (S1) –(S4) nach.

Zur Dreiecksungleichung (N3): Aus der Definition der Norm und den Skalarprodukteigenschaften erhält man unter Verwendung der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung für alle $x, y \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 =&\langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \leq \\ \leq&\|x\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2 \leq \\ \leq&\|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2\end{aligned}$$

Durch Wurzelziehen folgt die Behauptung.

(c) Für alle $x, y \in \mathcal{H}$ gilt:

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle \\ &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).\end{aligned}$$

Die Polarisierungsidentitäten rechnet man in ähnlicher Weise elementar nach. □

2.5. Bemerkung. Die Prä–Hilberträume sind unter den normierten $\mathbb{K}$–Vektorräumen durch die Parallelogrammgleichung charakterisiert, d.h.: Ist $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{K}$–Vektorraum, dessen Norm die Parallelogrammgleichung (2.2) erfüllt, so ist durch die Polarisierungsgleichung (2.3) bzw. (2.4) ein Skalarprodukt gegeben, dessen zugehörige Norm mit der ursprünglichen Norm übereinstimmt.

Beweis als Übung (Aufgabe 2.1).

2.6. Definition. Ein Prä–Hilbertraum $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ über $\mathbb{K}$, der bezüglich der durch das Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ definierten Norm vollständig ist, heißt ein *Hilbertraum*.

2.7. Beispiele. (a) Die in den Beispielen 2.3 (a), (c) und (e) angegebenen Prä–Hilberträume sind Hilberträume.

(b) Die in den Beispielen 2.3 (b) und (d) angegebenen Prä–Hilberträume sind keine Hilberträume.

2.8. Bemerkung. Seien $(\mathcal{H}_j, \langle\cdot,\cdot\rangle_j)$, $j = 1, 2$, zwei Prä-Hilberträume. Ist $V : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ eine lineare Isometrie, so gilt:

$$\forall x, y \in \mathcal{H}_1 \quad \langle Vx, Vy\rangle_2 = \langle x, y\rangle_1 .$$

Lineare Isometrien erhalten also das Skalarprodukt.

Dies folgt mit der Polarisierungsgleichung unmittelbar aus der Tatsache, daß V eine lineare Isometrie ist.

2.9. Satz. *Zu jedem Prä–Hilbertraum $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ gibt es einen bis auf einen isometrischen Isomorphismus eindeutig bestimmten Hilbertraum $(\mathcal{K}, [\cdot,\cdot])$, der $\mathcal{H}$ als Untervektorraum enthält und folgende Eigenschaften besitzt:*

(a) $\forall x, y \in \mathcal{H} \quad [x, y] = \langle x, y\rangle$.

(b) *Zu jedem $x \in \mathcal{K}$ gibt es eine Cauchy–Folge $(x_n)_{n=0}^\infty$ aus $\mathcal{H}$ mit $x_n \to x$ in $\mathcal{K}$ bezüglich der durch das Skalarprodukt $[\cdot,\cdot]$ auf $\mathcal{K}$ gegebenen Norm.*

Der Hilbertraum $\mathcal{K}$ heißt die Vervollständigung von $\mathcal{H}$.

Beweis. Sei $(\mathcal{K}, \|\cdot\|_\mathcal{K})$ die nach Satz 1.17 bis auf einen isometrischen Isomorphismus eindeutig bestimmte Vervollständigung von $\mathcal{H}$. Dann gibt es eine lineare Isometrie $J : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$, für die $J(\mathcal{H})$ dicht in $\mathcal{K}$ liegt. Zu beliebigen $u, v \in \mathcal{K}$ gibt es dann Cauchyfolgen $(x_n)_{n=1}^\infty$ und $(y_n)_{n=1}^\infty$ in $\mathcal{H}$ mit $Jx_n \to u$ und $Jy_n \to v$ in $(\mathcal{K}, \|\cdot\|_\mathcal{K})$ für $n \to \infty$. Da die Parallelogrammgleichung in $\mathcal{H}$ gilt und J eine lineare Isometrie ist, folgt wegen der Stetigkeit der Norm:

$$\begin{aligned}\|u+v\|_{\mathcal{K}}^2+\|u-v\|_{\mathcal{K}}^2 &= \lim_{n\to\infty}\left(\|Jx_n+Jy_n\|_{\mathcal{K}}^2+\|Jx_n-Jy_n\|_{\mathcal{K}}^2\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\|x_n+y_n\|^2+\|x_n-y_n\|^2\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} 2\left(\|x_n\|^2+\|y_n\|^2\right)\\ &= 2\lim_{n\to\infty}\left(\|Jx_n\|_{\mathcal{K}}^2+\|Jy_n\|_{\mathcal{K}}^2\right)\\ &= 2\left(\|u\|_{\mathcal{K}}^2+\|v\|_{\mathcal{K}}^2\right)\,.\end{aligned}$$

$(\mathcal{K},\|\cdot\|_{\mathcal{K}})$ erfüllt also die Parallelogrammgleichung. Nach Aufgabe 2.1 wird nun durch die Polarisierungsgleichung ein Skalarprodukt $[\cdot,\cdot]:\mathcal{K}\times\mathcal{K}\to\mathbb{K}$ definiert dessen zugehörige Norm mit $\|\cdot\|_{\mathcal{K}}$ übereinstimmt. Der Rest folgt nun leicht mit Bemerkung 2.8 und Satz 1.17. $\square$

In Analogie zum endlich-dimensionalen Fall definiert man: Zwei Vektoren x,y in einem Prä–Hilbertraum $(\mathcal{H},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ heißen zueinander *orthogonal* (oder *senkrecht zueinander*), falls $\langle x,y\rangle=0$ gilt. Wir schreiben dann auch $x\perp y$. Ist A eine nicht leere Teilmenge von $\mathcal{H}$, so definieren wir den *Orthogonalraum*

$$A^{\perp}:=\{x\in\mathcal{H}\,;\,\forall a\in A:\ \langle x,a\rangle=0\}$$

Statt $x\in A^{\perp}$ schreiben wir auch $x\perp A$.

2.10. Lemma. *Sei $(\mathcal{H},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Prä–Hilbertraum und $\emptyset\neq A\subset\mathcal{H}$.*
(a) *Ist $A\subseteq B\subseteq\mathcal{H}$, so gilt $B^{\perp}\subseteq A^{\perp}$.*
(b) $A^{\perp}=\overline{A}^{\perp}$.
(c) $A^{\perp}$ *ist abgeschlossener Unterevektorraum von $\mathcal{H}$.*
(d) $A^{\perp}=(\mathrm{LH}(A))^{\perp}$.

Beweis. (a) rechnet man unmittelbar nach.

(b) Nach (a) ist $\overline{A}^{\perp}\subseteq A^{\perp}$. Ist umgekehrt $x\perp A$ und $u\in\overline{A}$, so gibt es eine Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ in A mit $a_n\to u$ für $n\to\infty$ und es folgt wegen der Stetigkeit des Skalarproduktes $\langle x,u\rangle=\lim_{n\to\infty}\langle x,a_n\rangle=0$ und damit $x\in\overline{A}^{\perp}$.

(c) Es ist $A^{\perp}=\bigcap_{a\in A}\ker\langle\cdot,a\rangle$. Da die linearen Funktionale $\langle\cdot,a\rangle:x\mapsto\langle x,a\rangle$ wegen der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung für alle $a\in A$ stetig sind, ist $A^{\perp}$ also ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{H}$.

(d) Dies rechnet man leicht nach. $\square$

2.11. Lemma (Satz des Pythagoras). *Sei $\mathcal{H}$ ein Prä–Hilbertraum über $\mathbb{K}$ mit dem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle:\mathcal{H}\times\mathcal{H}\to\mathbb{K}$. Sind $x,y\in\mathcal{H}$ mit $x\perp y$, so gilt:*

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2\,.$$

Beweis. Wegen $\langle x,y\rangle=0$ hat man

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\langle x,y\rangle+\overline{\langle x,y\rangle}+\|y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2\,.$$

$\square$

Durch vollständige Induktion zeigt man mit Hilfe von Lemma 2.11: Sind $x_1,\dots,x_n$ n paarweise orthogonale Vektoren eines Prä-Hilbertraums $\mathcal{H}$, so gilt

$$\Big\|\sum_{j=1}^{n}x_j\Big\|^2=\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^2\,.$$

2.12. Definition. Eine Teilmenge K eines $\mathbb{K}$–Vektorraums E heißt *konvex*, falls für alle $x, y \in \mathbb{K}$ und alle $\alpha \in (0,1)$ auch $\alpha x + (1-\alpha)y \in \mathbb{K}$ gilt.

Wir wollen uns nun dem folgenden *Approximationsproblem* zuwenden: Sei $(\mathcal{H}\langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Prä–Hilbertraum über $\mathbb{K}$ und sei K eine konvexe Teilmenge von $\mathcal{H}$. Zu gegebenem $f \in \mathcal{H}$ suchen wir eine *Bestapproximation* aus K, d.h. ein $v \in K$ mit

$$\|f - v\| = \inf_{u \in K} \|f - u\|\,.$$

Fragestellungen dieser Art treten in verschiedenen Problemen der Anwendungen auf.

2.13. Beispiele. (a) Sei $\omega \in C([a,b],\mathbb{R})$ eine Funktion mit $\omega(t) \geq 0$ für alle $t \in [a,b]$ und $\omega(t) = 0$ für höchstens endlich viele $t \in [a,b]$. Dann ist durch $\langle\cdot,\cdot\rangle_\omega : C([a,b],\mathbb{K}) \times C([a,b],\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ mit

$$\langle f, g\rangle_\omega := \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\omega(t)dt \quad \text{für } f,g \in C([a,b],\mathbb{K})$$

ein Skalarprodukt auf $C([a,b],\mathbb{K})$ gegeben. Sei $f \in C([a,b],\mathbb{K})$. Gesucht ist ein Polynom p_f vom Grad $\leq n$ mit

$$\|f - p_f\|_\omega \leq \inf\{\|f - p\|_\omega\,;\, p \text{ Polynom vom Grad } \leq n\}\,.$$

Hier ist $K = \mathcal{P}_n$ der $(n+1)$–dimensionale Untervektorraum der Polynome vom Grad $\leq n$. Man spricht von Approximation im quadratischen Mittel oder von Gaußapproximation.

(b) Das lineare Ausgleichsproblem: Gegeben sei eine Matrix $A \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$ und ein Vektor $b \in \mathbb{K}^n$. Gesucht ist ein Vektor $x_0 \in \mathbb{K}^m$ der das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ *möglichst gut* löst, d.h. für den gilt

$$\|b - Ax_0\| = \inf_{x \in \mathbb{K}^m} \|b - Ax\|\,.$$

Hier ist $K = \operatorname{ran}(A) = \{Ax\,;\, x \in \mathbb{K}^m\}$.

Das obige Approximationsproblem wird gelöst durch:

2.14. Satz. *Sei $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Prä–Hilbertraum und sei $\emptyset \neq K \subset \mathcal{H}$ vollständig und konvex. Dann gibt es zu jedem $x \in \mathcal{H}$ genau ein $y \in K$ mit*

$$\|x - y\| = \inf_{u \in K} \|x - u\| = \delta\,.$$

y ist also die eindeutig bestimmte Bestapproximation zu x aus K.

Beweis. Zur Existenz einer Bestapproximation: Es gibt eine Folge $(u_n)_{n=1}^\infty$ in K mit $\lim_{n\to\infty} \|x - u_n\| = \delta$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq n_0$ gilt: $0 \leq \|x - u_n\|^2 - \delta^2 < \varepsilon^2/4$. Mit Hilfe der Parallelogrammgleichung (angewendet auf die Vektoren $\xi = x - u_n$ und $\eta = x - u_m$) erhalten wir für alle $n, m \geq n_0$ (unter Verwendung von $\frac{1}{2}(u_n + u_m) \in K$):

$$\begin{aligned}\|u_n - u_m\|^2 &= 2\left(\|x - u_n\|^2 + \|x - u_m\|^2\right) - 4\Big\|x - \frac{1}{2}(u_n + u_m)\Big\|^2 \\ &\leq 2\left(\|x - u_n\|^2 + \|x - u_m\|^2\right) - 4\delta^2 < \varepsilon^2\,.\end{aligned}$$

Also ist $(u_n)_{n=1}^\infty$ eine Cauchy–Folge. Da K nach Voraussetzung vollständig ist (in der durch die Norm $\|\cdot\|$ induzierten Metrik), existiert der Grenzwert $y := \lim_{n\to\infty} u_n$ und liegt in K. Wegen

$$\inf_{u\in K} \|x - u\| = \delta = \lim_{n\to\infty} \|x - u_n\| = \|x - y\|$$

ist y also eine Bestapproximation zu x aus K.

Zur Eindeutigkeit: Seien $y_1, y_2 \in K$ zwei Bestapproximationen zu x aus K mit $\|x - y_j\| = \delta$. Dann folgt wieder unter Anwendung der Parallelogrammgleichung und unter Beachtung von $\frac{1}{2}(y_1 + y_2) \in K$ (wegen der Konvexität von K):

$$0 \le \|y_1 - y_2\|^2 = 2(\|x-y_1\|^2 + \|x-y_2\|^2) - 4\big\|x - \frac{1}{2}(y_1+y_2)\big\|^2 \le 4\delta^2 - 4\big\|x - \frac{1}{2}(y_1+y_2)\big\|^2 \le 0$$

und damit $y_1 = y_2$. □

2.15. Folgerung. *Sei $\mathcal{H}$ ein Prä–Hilbertraum und $\mathcal{K}$ ein endlich dimensionaler Untervektorraum von $\mathcal{H}$. Dann gibt es zu jedem $x \in \mathcal{H}$ genau ein $y \in \mathcal{K}$ mit $\|x - y\| = \inf_{u \in \mathcal{K}} \|x - u\| = \operatorname{dist}(x, \mathcal{K})$.*

Beweis. Als endlich dimensionaler Untervektorraum von $\mathcal{H}$ ist $\mathcal{K}$ nach Folgerung 1.14 vollständig. Da $\mathcal{K}$ als Untervektorraum insbesondere konvex ist, folgt die Behauptung aus Satz 2.14. □

Bemerkung. Wie Sie selbst mit Hilfe eines einfachen Kompaktheitsschlusses zeigen können (Aufgabe 1.14), existiert ganz allgemein in jedem normierten $\mathbb{K}$–Vektorraum $(E, \|\cdot\|)$ zu jedem endlich dimensionalen Untervektorraum V und jedem $x \in E$ eine Bestapproximation zu x aus V. Jedoch ist die Eindeutigkeit (schon im Fall $(E, \|\cdot\|) = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$) nicht mehr gewährleistet.

2.16. Folgerung. *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\mathcal{K}$ ein abgeschlossener Untervektorraum von $\mathcal{H}$. Dann gibt es zu jedem $x \in \mathcal{H}$ genau ein $y \in \mathcal{K}$ mit $\|x - y\| = \inf_{u \in \mathcal{K}} \|x - u\| = \operatorname{dist}(x, \mathcal{K})$.*

Beweis. Als abgeschlossener Untervektorraum von $\mathcal{H}$ ist $\mathcal{K}$ vollständig. Da $\mathcal{K}$ als Untervektorraum auch konvex ist, folgt die Behauptung aus Satz 2.14. □

2.17. Satz (Projektionssatz). *Sei $\mathcal{M}$ abgeschlossener Unterraum eines Hilbertraums $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Dann gilt $\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$. Jedes $x \in \mathcal{H}$ hat also eine eindeutige Darstellung der Form $x = P_\mathcal{M}(x) + P_{\mathcal{M}^\perp}(x)$ mit $P_\mathcal{M}(x) \in \mathcal{M}$ und $P_{\mathcal{M}^\perp}(x) \in \mathcal{M}^\perp$. Für alle $x \in \mathcal{H}$ ist $P_\mathcal{M}(x)$ (bzw. $P_{\mathcal{M}^\perp}(x)$) die Bestapproximation zu x aus $\mathcal{M}$ (bzw. $\mathcal{M}^\perp$). Die hierdurch definierten Abbildungen $P_\mathcal{M}$ und $P_{\mathcal{M}^\perp}$ sind stetige lineare Operatoren auf $\mathcal{H}$ mit $\|P_\mathcal{M}\| \le 1$ ($= 1$, falls $\mathcal{M} \ne \{0\}$) und $\|P_{\mathcal{M}^\perp}\| \le 1$ ($= 1$, falls $\mathcal{M} \ne \mathcal{H}$) sowie $P_\mathcal{M}^2 = P_\mathcal{M}$ und $P_{\mathcal{M}^\perp}^2 = P_{\mathcal{M}^\perp}$. Ferner gilt $(\mathcal{M}^\perp)^\perp = \mathcal{M}$.*

Beweis. Ist $x \in \mathcal{M} \cap \mathcal{M}^\perp$, so ist $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = 0$ und somit $x = 0$. Also ist $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}^\perp = \{0\}$. Sei nun $x \in \mathcal{H}$ beliebig und sei $P_\mathcal{M}(x)$ die nach Folgerung 2.16 eindeutig bestimmte Bestapproximation zu x aus $\mathcal{M}$, so daß also gilt

$$\|x - P_\mathcal{M}(x)\| = \delta := \inf_{u \in \mathcal{H}} \|x - u\|\,.$$

Wir zeigen nun, daß $P_{\mathcal{M}^\perp}(x) := x - P_\mathcal{M}(x)$ in $\mathcal{M}^\perp$ liegt. Sei also $u \in \mathcal{M}$ beliebig vorgegeben. Für alle $\alpha \in \mathbb{K}$ ist $P_\mathcal{M}(x) + \alpha u \in \mathcal{M}$ und daher $\|x - (P_\mathcal{M}(x) + \alpha u)\| \ge \delta$. Es folgt also

$$\begin{aligned} 0 &\le \|x - (P_\mathcal{M}(x) + \alpha u)\|^2 - \|x - P_\mathcal{M}(x)\|^2 \\ &\le \langle (x - P_\mathcal{M}(x)) - \alpha u, (x - P_\mathcal{M}(x)) - \alpha u\rangle - \langle x - P_\mathcal{M}(x), x - P_\mathcal{M}(x)\rangle \\ &\le -\alpha\langle u, x - P_\mathcal{M}(x)\rangle - \overline{\alpha}\langle x - P_\mathcal{M}(x), u\rangle + |\alpha|^2\|u\|^2. \end{aligned}$$

Für alle $t \in \mathbb{R}$ erhalten wir hieraus mit $\alpha := t\langle x - P_\mathcal{M}(x), u\rangle$:

$$0 \le |\langle x - P_\mathcal{M}(x), u\rangle|^2(-2t + t^2\|u\|^2).$$

Diese Ungleichung kann nur dann für alle $t \in \mathbb{R}$ gelten, wenn $\langle x - P_\mathcal{M}(x), u\rangle = 0$ ist. Da u ein beliebiger Vektor aus $\mathcal{M}$ war folgt also $P_{\mathcal{M}^\perp}(x) = x - P_\mathcal{M}(x) \in \mathcal{M}^\perp$. Es ist also $x = P_{\mathcal{M}}(x) + P_{\mathcal{M}^\perp}(x)$ mit $P_{\mathcal{M}}(x) \in \mathcal{M}$ und $P_{\mathcal{M}^\perp}(x) \in \mathcal{M}^\perp$. Insbesondere folgt $\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$ und die Linearität der Abbildungen $P_{\mathcal{M}}$ und $P_{\mathcal{M}^\perp}$.

Nach Pythagoras hat man

$$\forall x \in \mathcal{H} : \|P_{\mathcal{M}}(x)\|^2 + \|P_{\mathcal{M}^\perp}(x)\|^2 = \|x\|^2.$$

Hieraus folgt nach Lemma 1.9 die Stetigkeit von $P_{\mathcal{M}}$ und $P_{\mathcal{M}^\perp}$ sowie $\|P_{\mathcal{M}}\| \leq 1$ und $\|P_{\mathcal{M}^\perp}\| \leq 1$. Gibt es ein $0 \neq u \in \mathcal{M}$, so ist $0 \neq \|u\| = \|P_{\mathcal{M}}(u)\|$ und daher $\|P_{\mathcal{M}}\| = 1$. Ist $\mathcal{M} \neq \mathcal{H}$, so gibt es wegen $\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$ ein $0 \neq v \in \mathcal{M}^\perp$. Für dieses ist $0 \neq \|v\| = \|P_{\mathcal{M}^\perp}(v)\|$, so daß dann $\|P_{\mathcal{M}^\perp}\| = 1$ gilt.

Die Inklusion $\mathcal{M} \subseteq (\mathcal{M}^\perp)^\perp$ ist unmittelbar klar. Ist umgekehrt $x \in (\mathcal{M}^\perp)^\perp$ so folgt $x = u + v$ mit $u \in \mathcal{M}$ und $v \in \mathcal{M}^\perp$. Wegen $x, u \in (\mathcal{M}^\perp)^\perp$ hat man $\|v\|^2 = \langle v, x - u\rangle = 0$ und somit $x = u \in \mathcal{M}$. □

2.18. Definition. Sei $\mathcal{H}$ ein Prä–Hilbertraum. Ein Operator $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ heißt *orthogonale Projektion*, falls $P^2 = P$ und $\operatorname{ran} P \perp \ker P$ gilt.

Der Projektionssatz besagt insbesondere, daß in einem Hilbertraum jeder abgeschlossene Unterraum stetig projiziert ist. Man kann zeigen, daß die Hilberträume hierdurch charakterisiert sind: Ein Banachraum ist genau dann topologisch isomorph zu einem Hilbertraum, wenn in ihm jeder abgeschlossene Unterraum stetig projiziert ist (Lindenstrauss und Tzafriri (1973)).

Wegen des Projektionssatzes nennen wir für einen abgeschlossenen Unterraum $\mathcal{M}$ eines Hilbertraums $\mathcal{H}$ den Orthogonalraum $\mathcal{M}^\perp$ auch *orthogonales Komplement* von $\mathcal{M}$ und schreibt auch $\mathcal{H} \ominus \mathcal{M}$ statt $\mathcal{M}^\perp$.

2.19. Satz von Riesz. *Sei $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum. Für alle $x \in \mathcal{H}$ definieren wir $Jx : \mathcal{H} \to \mathbb{K}$ durch $(Jx)(y) := \langle y, x\rangle$ für alle $y \in \mathcal{H}$. Dann ist J eine konjugiert lineare, bijektive Isometrie von $\mathcal{H}$ auf seinen topologischen Dualraum $\mathcal{H}'$.*

Beweis. Nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung gilt für alle $x, y \in \mathcal{H}$:

$$|(Jx)(y)| = |\langle y, x\rangle| \leq \|y\| \cdot \|x\|.$$

Also ist Jx stetig und $\|Jx\| \leq \|x\|$. Wegen $(Jx)(x) = \|x\|^2$ folgt $\|Jx\| = \|x\|$. Die Linearität von Jx und die konjugierte Linearität von J folgen wegen der Linearität des Skalarproduktes in der ersten und der konjugierten Linearität in der zweiten Variablen. Insbesondere ist $J : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ eine konjugiert lineare Isometrie.

Zu zeigen ist noch die Surjektivität von J. Sei also $0 \neq f \in \mathcal{H}'$ beliebig. Dann ist $\ker f$ ein von $\mathcal{H}$ verschiedener abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{H}$. Also gibt es nach dem Projektionssatz ein $0 \neq y \in (\ker f)^\perp$. Für alle $u \in \mathcal{H}$ gilt also wegen $f(u)y - f(y)u \in \ker f$:

$$0 = \langle f(u)y - f(y)u, y\rangle = f(u)\|y\|^2 - f(y)\langle u, y\rangle\,.$$

Damit folgt $f = Jx$ mit $x := \|y\|^{-2}\overline{f(y)}y$. □

2.20. Folgerung. *Jeder Hilbertraum $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ist isometrisch isomorph zu seinem topologischen Bidualraum $\mathcal{H}'' := (\mathcal{H}')'$.*

Beweis. Sei $J : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ die in im Satz von Riesz angegebene bijektive, konjugiert lineare Isometrie. Dann wird durch

$$[f, g] := \langle J^{-1}g, J^{-1}f\rangle \quad \text{für alle } f, g \in \mathcal{H}'$$

ein Skalarprodukt $[\cdot,\cdot]$ auf $\mathcal{H}'$ definiert, dessen zugehörige Norm mit der Operatornorm auf $\mathcal{H}'$ übereinstimmt. $(\mathcal{H}', [\cdot,\cdot])$ ist also ein Hilbertraum, da $\mathcal{H}'$ vollständig ist. Nach dem Satz von Riesz gibt es also eine bijektive konjugiert lineare Isometrie $K : \mathcal{H}' \to \mathcal{H}''$. Als Hintereinanderausführung von zwei bijektiven, konjugiert linearen Isometrien ist $K \circ J : \mathcal{H} \to \mathcal{H}''$ dann eine bijektive, lineare Isometrie. □

2.21. SATZ. *Ein Unterraum $\mathcal{M}$ eines Hilbertraums $\mathcal{H}$ liegt genau dann dicht in $\mathcal{H}$, wenn $\mathcal{M}^\perp = \{0\}$ ist.*

BEWEIS. Es ist stets $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}^{\perp\perp}$ und daher auch $\overline{\mathcal{M}} \subseteq \mathcal{M}^{\perp\perp}$ (da $\mathcal{M}^{\perp\perp}$ nach Lemma 2.10 (c) abgeschlossen ist). Ist $\mathcal{M}$ nicht dicht in $\mathcal{H}$, so ist $\overline{\mathcal{M}} \neq \mathcal{H}$ und daher nach dem Projektionssatz $\mathcal{M}^\perp = \overline{\mathcal{M}}^\perp \neq \{0\}$. Ist umgekehrt $\mathcal{M}^\perp = \{0\}$, so folgt nach dem Projektionssatz $\mathcal{H} = \overline{\mathcal{M}} \oplus \overline{\mathcal{M}}^\perp = \overline{\mathcal{M}}$ und damit die Dichtheit von $\mathcal{M}$ in $\mathcal{H}$. □

2.22. DEFINITION. Eine Familie $(e_i)_{i\in I}$ von Vektoren in einem Prä–Hilbertraum $\mathcal{H}$ heißt ein

(a) *Orthogonalsystem*, falls für alle $i, j \in I$ mit $i \neq j$ gilt $\langle e_i, e_j\rangle = 0$.
(b) *Orthonormalsystem*, falls $(e_i)_{i\in I}$ ein Orthogonalsystem ist mit $\|e_i\| = 1$ für alle $i \in I$.
(c) *vollständiges Orthonormalsystem*, falls $(e_i)_{i\in I}$ ein Orthonormalsystem ist und $\mathrm{LH}\{e_i\,;\, i \in I\}$ dicht in $\mathcal{H}$ liegt.

2.23. FOLGERUNG. *Ein Orthonormalsystem $(e_i)_{i\in I}$ in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist genau dann ein vollständiges Orthonormalsystem, wenn $\{e_i\,;\, i \in I\}^\perp = \{0\}$ ist.*

BEWEIS. Diese Aussage folgt unmittelbar aus Lemma 2.10 (d) und Satz 2.21 □

Ist I eine Menge, so bezeichnen wir im folgenden mit $\mathfrak{F}(I)$ die Menge aller endlichen Teilmengen von I.

2.24. SATZ. *Sei $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Prä-Hilbertraum und $(e_i)_{i\in I}$ ein Orthonormalsystem in $\mathcal{H}$. Dann gilt für alle $x \in \mathcal{H}$:*

(a) $(\langle x, e_i\rangle)_{i\in I} \in \ell^2(I)$.
(b) $\sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2 = \sup_{F\in\mathfrak{F}(I)} \sum_{i\in F} |\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2$. *(Besselsche Ungleichung).*
(c) *Genau dann gilt in der Besselschen Ungleichung das Gleichheitszeichen, wenn*

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists F_0 \in \mathfrak{F}(I)\, \forall F_0 \subseteq F \in \mathfrak{F}(I) \quad \Big\| x - \sum_{i\in F}\langle x, e_i\rangle e_i \Big\| < \varepsilon. \tag{2.5}$$

Wir schreiben dann auch

$$x = \lim_{F\in\mathfrak{F}(I)} \sum_{i\in F}\langle x, e_i\rangle e_i = \sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle e_i\,.$$

BEWEIS. Sei also $x \in \mathcal{H}$ beliebig. Für alle $F \in \mathfrak{F}(I)$ definieren wir

$$x_F := \sum_{i\in F}\langle x, e_i\rangle e_i.$$

Nach Pythagoras (Lemma 2.11) gilt $\|x_F\|^2 = \sum_{i\in F} |\langle x, e_i\rangle|^2$. Ferner hat man

$$\begin{aligned} 0 \leq \|x - x_F\|^2 &= \langle x - x_F, x - x_F\rangle = \|x\|^2 - \langle x, x_F\rangle - \langle x_F, x\rangle + \|x_F\|^2 \\ &= \|x\|^2 - \sum_{i\in F} \overline{\langle x, e_i\rangle}\langle x, e_i\rangle - \sum_{i\in F} \overline{\langle x, e_i\rangle}\langle x, e_i\rangle + \sum_{i\in F} |\langle x, e_i\rangle|^2 \\ &= \|x\|^2 - \|x_F\|^2\,. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Damit folgt

$$\sup_{F\in\mathfrak{F}(I)} \sum_{i\in F} |\langle x, e_i\rangle|^2 = \sup_{F\in\mathfrak{F}(I)} \|x_F\|^2 \leq \|x\|^2 < \infty\,.$$

Insbesondere ist also $(\langle x, e_i\rangle)_{i\in I} \in \ell^2(I)$ und

$$\|(\langle x, e_i\rangle)_{i\in I}\|^2_{\ell^2(I)} = \sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2 = \sup_{F\in\mathfrak{F}(I)} \sum_{i\in F} |\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2\,.$$

Damit sind (a) und (b) bewiesen.

Zu (c): Ist (2.5) erfüllt, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $F_0 \in \mathfrak{F}(I)$ mit

$$\forall\, F_0 \subseteq F \in \mathfrak{F}(I): \qquad 0 \le \|x\|^2 - \|x_F\|^2 = \|x - x_F\|^2 < \varepsilon\,.$$

Hieraus folgt

$$\sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2 = \sup_{F\in\mathfrak{F}(I)} \sum_{i\in F} |\langle x, e_i\rangle|^2 = \|x\|^2\,. \tag{2.7}$$

Ist umgekehrt (2.7) erfüllt und $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben, so gibt es ein $F_0 \in \mathfrak{F}(I)$ mit

$$\|x\|^2 \ge \sum_{i\in F_0} |\langle x, e_i\rangle|^2 > \|x\|^2 - \varepsilon^2\,.$$

Mit (2.6) folgt für alle $F \in \mathfrak{F}(I)$ mit $F_0 \subseteq F$:

$$\|x - x_F\|^2 = \|x\|^2 - \|x_F\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i\in F} |\langle x, e_i\rangle|^2 \le \|x\|^2 - \sum_{i\in F_0} |\langle x, e_i\rangle|^2 < \varepsilon^2.$$

Also ist (2.5) erfüllt. □

2.25. Beispiel. Sei $I \ne \emptyset$ eine Menge. Dann gilt für alle $c = (c_i)_{i\in I} \in \ell^2(I)$: Es ist $c = \lim_{F\in\mathfrak{F}(I)} c_F$, wobei $c_F := (c_{F,i})_{i\in I}$ mit $c_{F,i} := c_i$ für alle $i \in F$ und $c_{F,i} := 0$ für alle $i \in I \setminus F$.

Beweis. Die Familie $(e_i)_{i\in I}$ mit $e_i := (\delta_{i,j})_{j\in I}$, $\delta_{i,j} = 1$ für $i = j$, $\delta_{i,j} = 0$ für $i \ne j$, ist ein Orthonormalsystem in $\ell^2(I)$ und für alle $c = (c_i)_{i\in I} \in \ell^2(I)$ gilt

$$\|c\|_2^2 = \sum_{i\in I} |c_i|^2 = \sum_{i\in I} |\langle c, e_i\rangle|^2.$$

Mit Satz 2.24 (c) folgt die Behauptung. □

2.26. Definition. Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\mathcal{M}$ ein Untervektorraum von $\mathcal{H}$. Ein Orthonormalsystem $(e_i)_{i\in I}$ in $\mathcal{M}$ heißt *Orthonormalbasis* von $\mathcal{M}$, falls für alle $x \in \mathcal{M}$ gilt:

$$x = \lim_{F\in\mathfrak{F}(I)} \sum_{i\in F} \langle x, e_i\rangle e_i = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle e_i\,.$$

2.27. Satz. *Sei $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum und $(e_i)_{i\in I}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in $\mathcal{H}$. Dann ist $(e_i)_{i\in I}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$ und für alle $x \in \mathcal{H}$ gilt die Parsevalsche Gleichung*

$$\|x\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2.$$

Ferner ist $\mathcal{H}$ isometrisch isomorph zu $\ell^2(I)$ vermöge der Abbildung $x \mapsto (\langle x, e_i\rangle)_{i\in I}$.

Beweis. Für alle $F \in \mathfrak{F}(I)$ und alle $c = (c_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ mit $c_i = 0$ für alle $i \in I \setminus F$ gilt nach Pythagoras $\|\sum_{i\in I} c_i e_i\|^2 = \sum_{i\in I} |c_i|^2$. Da $\mathcal{M} := \mathrm{LH}\{e_i\,;\, i \in I\} = \{\sum_{i\in I} c_i e_i\,;\, c_i \in \mathbb{K}, c_i \ne 0$ für höchstens endlich viele $i \in I\}$ nach Voraussetzung dicht in $\mathcal{H}$ liegt und nach Beispiel 2.25 auch $\mathcal{M}_0 := \{(c_i)_{i\in I}\,;\, c_i \in \mathbb{K}, c_i \ne 0$ für höchstens endlich viele $i \in I\}$ dicht in $\ell^2(I)$ liegt und isometrisch isomorph zu $\mathcal{M}$ ist, sind sowohl $\mathcal{H}$ als auch $\ell^2(I)$ Vervollständigungen von $\mathcal{M}$ und daher nach Satz 2.9 zueinander isometrisch isomorph vermöge eines isometrischen Isomorphismusses $\Phi : \mathcal{H} \to \ell^2(I)$ mit $\Phi(x) = (\langle x, e_i\rangle)_{i\in I}$ für alle $x \in \mathcal{M}$. Da die Abbildung $x \mapsto (\langle x, e_i\rangle)_{i\in I}$ offensichtlich linear und nach Satz 2.24 (a),(b) auch stetig von $\mathcal{H}$ nach $\ell^2(I)$ ist, gilt $\Phi(x) = (\langle x, e_i\rangle)_{i\in I}$ für alle $x \in \mathcal{H}$. Insbesondere gilt $\|x\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2$ für alle $x \in \mathcal{H}$ und daher nach Satz 2.24 (c) auch $x = \lim_{F\in\mathfrak{F}(I)} \sum_{i\in F} \langle x, e_i\rangle e_i = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle e_i$ für alle $x \in \mathcal{H}$. Also ist $(e_i)_{i\in I}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$. □

2.28. Folgerung. *Für ein Orthonormalsystem* $(e_i)_{i\in I}$ *in einem Hilbertraum* $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *sind äquivalent:*

(a) $(e_i)_{i\in I}$ *ist ein vollständiges Orthonormalsystem in* $\mathcal{H}$*.*
(b) $(e_i)_{i\in I}$ *ist eine Orthonormalbasis von* $\mathcal{H}$*.*
(c) *Für alle* $x \in \mathcal{H}$ *gilt die Parsevalsche Gleichung:*

$$\|x\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2.$$

Beweis. Daß jede Orthonormalbasis insbesondere ein vollständiges Orthonormalsystem ist, folgt direkt aus der Definition 2.26. Nach Satz 2.27 folgt (c) aus (a). Ist (c) erfüllt, so ist $(e_i)_{i\in I}$ nach Satz 2.24 (c) eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$. □

2.29. Satz. *Jeder Hilbertraum besitzt eine Orthonormalbasis.*

Beweis. Die Menge $\mathcal{A}$ aller Orthonormalsysteme in $\mathcal{H}$ ist nicht leer (wegen $\emptyset \in \mathcal{A}$) und durch die Inklusion teilweise geordnet. Ist $\mathcal{K} \subset \mathcal{A}$ eine totalgeordnete Familie von Orthonormalsystemen, so ist die Vereinigung über alle Orthonormalsysteme aus $\mathcal{K}$ wieder ein Orthonormalsystem und somit eine obere Schranke für $\mathcal{K}$. Nach dem Lemma von Zorn hat $\mathcal{A}$ also wenigstens ein maximales Element $(e_i)_{i\in I}$. Wäre $\mathrm{LH}\{e_i\,;\, i \in I\}$ nicht dicht in $\mathcal{H}$, so gäbe es nach dem Projektionssatz ein $v \in \mathrm{LH}\{e_i\,;\, i \in I\}^\perp$ mit $\|v\| = 1$. Dann wäre aber $\{v\} \cup \{e_i\,;\, i \in I\}$ ein $\{e_i\,;\, i \in I\}$ echt enthaltendes Orthonormalsystem im Widerspruch zur Maximalität von $\{e_i\,;\, i \in I\}$. Das Orthonormalsystem $(e_i)_{i\in I}$ ist also ein vollständiges Orthonormalsystem und daher eine Orthonormalbasis. □

2.30. Satz. *Alle Orthogonalbasen eines Hilbertraums* $(\mathcal{H}\langle,\cdot,\cdot\rangle)$ *haben die gleiche Mächtigkeit.*

Beweis. Seien also $(e_i)_{i\in I}$ und $(f_j)_{j\in J}$ zwei Orthonormalbasen von $\mathcal{H}$. Da die Elemente einer Orthonormalbasis stets linear unabhängig sind, folgt aus der linearen Algebra: I ist genau dann eine endliche Menge, wenn J eine endliche Menge ist. In diesem Fall ist dann auch $|I| = |J|$. Seien nun sowohl I wie auch J unendliche Mengen. Wir setzen

$$K := \{(i,j) \in I \times J\,;\, \langle e_i, f_j\rangle \neq 0\}\,.$$

Dann folgt

$$K = \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{j\in J} B_j$$

mit

$$A_i = \{(i,j)\,;\, j \in J,\, \langle e_i, f_j\rangle \neq 0\} \neq \emptyset \text{ für alle } i \in I$$

und

$$B_j = \{(i,j)\,;\, i \in I,\, \langle e_i, f_j\rangle \neq 0\} \neq \emptyset \text{ für alle } j \in J\,.$$

Nach Folgerung 2.23 in Verbindung mit der Parsevalschen Gleichung gilt in der Tat $A_i \neq \emptyset$ und $B_j \neq \emptyset$ für alle $i \in I, j \in J$. Wegen $(\langle e_i, f_j\rangle)_{j\in J} \in \ell^2(J)$ für alle $i \in I$ ist A_i für alle $i \in I$ höchstens abzählbar unendlich. Ferner sind die Mengen A_i, $i \in I$, paarweise disjunkt. Es folgt nach dem Auswahlaxiom

$$|I| \leq |K| = \sum_{i\in I} |A_i| \leq \sum_{i\in I} \aleph_0 = |I|$$

(wegen $\aleph_0|I| = |I|$) und damit $|I| = |K|$. Analog zeigt man $|J| = |K|$. □

Bezüglich der verwendeten Rechenregeln für Kardinalzahlen siehe z.B. [**15**].

2.31. Definition. Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Die nach Satz 2.30 eindeutig bestimmte Mächtigkeit einer Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$ heißt die *Hilbertraum–Dimension von* $\mathcal{H}$.

2.32. Satz. *Zwei Hilberträume* $(\mathcal{H}_j, \langle \cdot, \cdot \rangle_j)$, $j = 1, 2$, *sind genau dann zueinander isometrisch isomorph, wenn sie die gleiche Hilbertraumdimension haben.*

Beweis. Gibt es einen isometrischen Isomorphismus $\Phi : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ und ist $(e_i)_{i\in I}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}_1$, so ist auch $(\Phi(e_i))_{i\in I}$ ein Orthonormalsystem in $\mathcal{H}_2$ von gleicher Mächtigkeit. Man beachte hierbei, daß nach der Polarisierungsidentität $\langle \Phi(x), \Phi(y)\rangle_2 = \langle x, y\rangle_1$ für alle $x, y \in \mathcal{H}_1$ gilt. Ist $y \in \mathrm{LH}\{\Phi(e_i)_{i\in I}\}^\perp$, so ist $y = \Phi(u)$ für ein $u \in \mathcal{H}$ und es folgt $\langle u, e_i\rangle = \langle y, \Phi(e_i)\rangle = 0$. Also ist $u \in \mathrm{LH}\{e_i\,;\, i \in I\}^\perp = \{0\}$ und somit $y = 0$. $(\Phi(e_i))_{i\in I}$ ist also ein vollständiges Orthonormalsystem und damit eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}_2$, welche die gleiche Mächtigkeit wie $(e_i)_{i\in I}$ besitzt.

Sei nun vorausgesetzt, daß $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ die gleiche Hilbertraum-Dimension besitzen und seien $(e_i)_{i\in I}$ und $(f_j)_{j\in J}$ Orthonormalbasen von $\mathcal{H}_1$ bzw. $\mathcal{H}_2$. Dann gibt es eine bijektive Abbildung $\varphi : I \to J$ von I auf J. Mit $(f_j)_{j\in J}$ ist auch $(f_{\varphi(i)})_{i\in I}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}_2$. Nach Satz 2.27 sind $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ beide isometrisch isomorph zu $\ell^2(I)$ und damit auch zueinander isometrisch isomorph. $\square$

2.33. Satz. *Für einen unendlichdimensionalen Hilbertraum* $\mathcal{H}$ *sind äquivalent.*

(a) $\mathcal{H}$ *hat die Hilbertraum-Dimension* $\aleph_0$.
(b) $\mathcal{H}$ *besitzt eine abzählbare Orthonormalbasis.*
(c) $\mathcal{H}$ *ist isometrisch isomorph zu* $\ell^2(\mathbb{N})$.
(d) $\mathcal{H}$ *ist separabel.*

Beweis. Die Äquivalenz der Aussagen (a), (b) und (c) ist nach Definition der Hilbertraum–Dimension und Satz 2.32 klar. Die Separabilität von $\ell^2(\mathbb{N})$ ist in den Übungen gezeigt worden. Zu zeigen bleibt also nur die Richtung von (d) nach (b). Dies soll als Übung ausgeführt werden. $\square$

2.34. Definition. Sei E ein $\mathbb{K}$–Vektorraum. Eine Abbildung $B : E \times E \to \mathbb{K}$ heißt *Sesquilinearform* auf E, falls gilt:

(SL 1) Für alle $x \in E$ ist die Abbildung $u \mapsto B(u, x)$ linear von E nach $\mathbb{K}$.
(SL 2) Für alle $x \in E$ ist die Abbildung $u \mapsto B(x, u)$ konjugiert-linear von E nach $\mathbb{K}$.

Ist $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, so heißt eine Sesquilinearform $B : E \times E \to \mathbb{K}$ beschränkt, falls

$$\|B\| := \sup\{|B(x, y)|\,;\, x, y \in E, \|x\| \le 1, \|y\| \le 1\} < \infty\,. \tag{2.8}$$

Man rechnet leicht nach, daß die Menge der Sesquilinearformen auf einem Vektorraum E mit den punktweisen Operationen der Addition und der Multiplikation mit Skalaren als Verknüpfungen einen $\mathbb{K}$–Vektorraum bilden. Ist $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{K}$–Vektorraum, so ist die Menge $\mathfrak{B}(E, E)$ der beschränkten Sesquilinearformen auf ein Untervektorraum des Raums aller Sesquilinearformen und durch (2.8) ist eine Norm auf $\mathfrak{B}(E, E)$ gegeben.

2.35. Beispiele. (a) Jedes Skalarprodukt ist eine Sesquilinearform.

(b) Sei $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Prä–Hilbertraum und sei $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Dann ist durch $B_T(x, y) := \langle Tx, y\rangle$ für alle $x, y \in \mathcal{H}$ eine Sesquilinearform auf $\mathcal{H}$ definiert. Diese ist sogar beschränkt, denn

$$\|B_T\| = \sup\{|\langle Tx, y\rangle|\,;\, x, y \in \mathcal{H}, \|x\| \le 1, \|y\| \le 1\} \le \|T\| < \infty\,. \tag{2.9}$$

Ist $T = 0$, so ist also auch $B_T = 0$. Sei nun $T \ne 0$ vorausgesetzt. Dann gilt:

$$\|T\|^2 = \sup_{x\in B_{\mathcal{H}}} \|Tx\|^2 = \|T\| \cdot \sup_{x\in B_{\mathcal{H}}} |\langle Tx, \|T\|^{-1}Tx\rangle| \le \|T\| \cdot \|B_T\|\,.$$

Wegen (2.9) folgt hieraus sogar $\|T\| = \|B_T\|$ für alle $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Da $T \mapsto B_T$ offensichtlich linear ist erhalten wir: *Die Abbildung* $T \mapsto B_T$ *ist eine lineare Isometrie.* Wir werden später sehen daß diese im Hilbertraumfall sogar ein isometrischer Isomorphismus ist.

2.36. LEMMA. *Sei $B : E \times E \to \mathbb{K}$ eine Sesquilinearform auf einem $\mathbb{K}$–Vektorraum E. Dann gilt die Polarisierungsidentität:*

(a) *Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und B symmetrisch (d.h. mit $B(x, y) = B(y, x)$ für alle $x, y \in E$), so gilt*

$$\forall x, y \in E : B(x, y) = \frac{1}{4}(B(x + y, x + y) - B(x - y, x - y)) \quad \text{im Fall } \mathbb{K} = \mathbb{R}$$

(b) *Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gilt:*

$$\forall x, y \in E : B(x, y) = \frac{1}{4}(B(x+y, x+y) - B(x-y, x-y) + iB(x+iy, x+iy) - iB(x-iy, x-iy)).$$

BEWEIS. Dies beweist man durch direktes Nachrechnen. □

2.37. DEFINITION. Sei $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Prä–Hilbertraum. Ein Operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ heißt *hermitesch*, falls für alle $x, y \in \mathcal{H}$ gilt: $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$.

2.38. FOLGERUNG. *Sei $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Prä–Hilbertraum über $\mathbb{K}$ und sei $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und T hermitesch oder ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so gilt $T = 0$ genau dann, wenn für alle $x \in \mathcal{H}$ gilt $\langle Tx, x\rangle = 0$.*

BEWEIS. Dies folgt unmittelbar aus Beispiel 2.35 und der Polarisierungsidentität 2.36 □

Sind $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ zwei normierte Räume und ist $T \in \mathcal{L}(E, F)$, so wird durch $\varphi \mapsto \varphi \circ T$ eine stetige lineare Abbildung $T' \in \mathcal{L}(F', E')$ definiert mit $\|T'\| \leq \|T\|$. Diese heißt die zu T *transponierte* (oder zu T *duale* Abbildung).

Sind $(\mathcal{H}_j, \langle\cdot,\cdot\rangle_j)$, $j = 1, 2$, zwei Hilberträume und bezeichnet $J_j : \mathcal{H}_j \to \mathcal{H}_j'$, $j = 1, 2$, die kanonischen bijektiven, isometrischen konjugiert linearen Abbildungen, so heißt für $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ der Operator $T^* := J_1^{-1} \circ T' \circ J_2$ der zu T *adjungierte* Operator.

Wir fassen einige erste Eigenschaften der Adjungiertenbildung in dem folgenden Lemma zusammen.

2.39. LEMMA. *Seien $(\mathcal{H}_j, \langle\cdot,\cdot\rangle_j)$, $j = 1, 2$, zwei Hilberträume und $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. $J_j : \mathcal{H}_j \to \mathcal{H}_j'$, $j = 1, 2$, seien die kanonischen isometrischen, bijektiven, konjugiert linearen Abbildungen. Dann gilt:*

(a) *T^* ist der einzige Operator aus $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ mit*

$$\forall x \in \mathcal{H}_1\, \forall y \in \mathcal{H}_2 : \quad \langle Tx, y\rangle_2 = \langle x, T^*y\rangle_1 .$$

(b) *$T^{**} := (T^*)^* = T$.*

(c) *Ist $\mathcal{H}_3$ ein weiterer Hilbertraum und $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)$, so gilt $(ST)^* = T^*S^*$.*

(d) *Die Adjungiertenbildung $^* : \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \to \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ ist eine konjugiert lineare bijektive Isometrie.*

(e) *$\|T^*T\| = \|T\|^2$.*

BEWEIS. (a) Für alle $x \in \mathcal{H}_1$ und alle $y \in \mathcal{H}_2$ gilt

$$\langle Tx, y\rangle_2 = (J_2y)(Tx) = (T'J_2y)(x) = \langle x, J_1^{-1}T'J_2y\rangle_1 = \langle x, T^*y\rangle_1 .$$

Ist auch $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ mit $\langle Tx, y\rangle_2 = \langle x, Sy\rangle_1$ für alle $x \in \mathcal{H}_1$ und alle $y \in \mathcal{H}_2$, so folgt für alle $x \in \mathcal{H}_1$, $y \in \mathcal{H}_2$ auch $\langle x, (S - T^*)y\rangle_1 = 0$ und damit $T^* = S$.

(b) Für alle $x \in \mathcal{H}_1$ gilt unter Verwendung von (a) mit $y := Tx - T^{**}x$:

$$\begin{aligned} \|y\|^2 =& \langle Tx, y\rangle_2 - \langle T^{**}x, y\rangle_2 = \langle Tx, y\rangle_2 - \overline{\langle y, T^{**}x\rangle_2} = \langle Tx, y\rangle_2 - \overline{\langle T^*y, x\rangle_2} \\ =& \langle Tx, y\rangle_2 - \langle x, T^*y\rangle_2 = 0. \end{aligned}$$

Also gilt $T^{**} = T$.

(c) rechnet man elementar nach.

(d) Für alle $y \in \mathcal{H}_2$ mit $\|y\|_2 \leq 1$ gilt:

$$\begin{aligned}\|T^*y\|_2 =& \|J_1^{-1}T'J_2y\|_1 = \|T'J_2y\|_{\mathcal{H}_1'} = \sup\{|(T'J_2y)(x)|\,;\, x \in \mathcal{H}_1, \|x\|_1 \leq 1\}\\ =& \sup\{|(J_2y)(Tx)|\,;\, x \in \mathcal{H}_1, \|x\|_1 \leq 1\}\\ \leq& \sup\{\|J_2y\|_{\mathcal{H}_2'} \cdot \|Tx\|_2\,;\, x \in \mathcal{H}_1, \|x\|_1 \leq 1\} \leq \|T\|\,.\end{aligned}$$

Damit folgt $\|T^*\| \leq \|T\|$. Wenden wir dies auch auf T^* an, so erhalten wir unter Verwendung von (b), daß $\|T\| = \|T^{**}\| \leq \|T^*\|$ und damit insgesamt $\|T\| = \|T^*\|$ gilt.

(e) Nach (d) ist $\|T^*T\| \leq \|T^*\| \cdot \|T\| = \|T\|^2$. Für alle $x \in \mathcal{H}_1$ mit $\|x\| \leq 1$ gilt ferner

$$\|Tx\|_2 = \langle Tx, Tx\rangle_2 = \langle x, T^*Tx\rangle_1 \leq \|x\|_1 \cdot \|T^*T\| \cdot \|x\|_1 \leq \|T^*T\|,$$

womit die Behauptung folgt. □

Nach Lemma 2.39 (a) ist also ein stetiger linearer Operator T auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ genau dann hermitesch, wenn $T = T^*$ gilt.

2.40. Satz. *Zu jeder beschränkten Sesquilinearform $B : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{K}$ auf einem Hilbertraum $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ gibt es genau einen Operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $B = B_T$.*

Beweis. Da B beschränkt ist, gilt $|B(x,y)| \leq \|B\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|$ für alle $x, y \in \mathcal{H}$. Für alle $y \in \mathcal{H}$ ist als durch $x \mapsto B(x,y)$ eine stetige Abbildung von $\mathcal{H}$ nach $\mathbb{K}$ gegeben. Nach dem Satz von Riesz gibt es also genau ein $Sy \in \mathcal{H}$ mit $B(x,y) = \langle x, Sy\rangle$ für alle $x \in \mathcal{H}$. Für alle $x, u, v \in \mathcal{H}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ gilt

$$\begin{aligned}\langle x, S(\alpha u + \beta v)\rangle =& B(x, \alpha u + \beta v) = \overline{\alpha}B(x,u) + \overline{\beta}B(x,v) = \overline{\alpha}\langle x, Su\rangle + \overline{\beta}\langle x, Sv\rangle = \\ =& \langle x, \alpha Su + \beta Sv\rangle.\end{aligned}$$

Dies zeigt, daß $S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ eine lineare Abbildung ist. Für alle $x \in \mathcal{H}$ mit $\|x\| \leq 1$ gilt

$$\|Sx\|^2 = \langle Sx, Sx\rangle = B(Sx, x) \leq \|B\| \cdot \|Sx\| \cdot \|x\|\,.$$

Hieraus folgt die Stetigkeit von S und $\|S\| \leq \|B\|$. Mit $T := S^*$ folgt nun die Existenzaussage. Ist $R \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ein weiterer Operator mit $B_R = B$, so folgt für $x, y \in \mathcal{H}$:

$$\langle (T - R)x, y\rangle = \langle Tx, y\rangle - \langle Rx, y\rangle = B(x,y) - B(x,y) = 0$$

und damit $R = T$. □

2.41. Definition. Sei $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum. Ein Operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ heißt

- *selbstadjungiert*, falls $T = T^*$,
- *normal*, falls $TT^* = T^*T$,
- *positiv*, falls $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ für alle $x \in \mathcal{H}$,
- *strikt positiv*, falls $\langle Tx, x\rangle > 0$ für alle $0 \neq x \in \mathcal{H}$.

Sind $(\mathcal{H}_j, \langle\cdot,\cdot\rangle_j)$, $j = 1, 2$, zwei Hilberträume, so heißt ein Operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ *unitär*, falls $TT^* = 1_{\mathcal{H}_2}$ und $T^*T = 1_{\mathcal{H}_1}$.

Aus der Definition folgt insbesondere, daß jeder unitäre Operator $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ von einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ in sich schon ein normaler Operator ist.

2.42. Lemma. *Für einen stetigen linearen Operator T auf einem Hilbertraum $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ über $\mathbb{C}$ sind äquivalent:*

(a) *T ist selbstadjungiert.*
(b) *T ist hermitesch.*
(c) *Für alle $x \in \mathcal{H}$ ist $\langle Tx, x\rangle$ reell.*

Beweis. Wie wir schon festgestellt haben ist nach Lemma 2.39 (a) T genau dann hermitesch, wenn $T = T^*$ gilt.

Ist T selbstadjungiert, so ist nach Lemma 2.39 (a) $\langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle$ für alle $x \in \mathcal{H}$ und daher (wegen (S3)) $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$.

Ist (c) erfüllt, so erhält man mit der Polarisierungsformel 2.36 für alle $x, y \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned}\langle Tx, y\rangle =& \frac{1}{4}(\langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle + \\ &+ i\langle T(x+iy), x+iy\rangle - i\langle T(x-iy), x-iy\rangle) \\ =& \frac{1}{4}(\langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle + \\ &+ i\langle T(ix-y), ix-y\rangle - i\langle T(ix+y), ix+y\rangle) \\ =& \overline{\langle Ty, x\rangle} = \langle x, Ty\rangle \,.\end{aligned}$$

Mit 2.39 (a) folgt $T = T^*$. □

2.43. Lemma. *Für einen stetigen linearen Operator T auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ über $\mathbb{C}$ gilt:*

(a) *Ist T positiv, so ist T selbstadjungiert.*
(b) *TT^* und T^*T sind positiv (strikt positiv, falls T^* bzw. T injektiv ist)..*

Beweis. (a) folgt aus Lemma 2.42.

(b) Für alle $0 \neq x \in \mathcal{H}$ gilt $\langle T^*Tx, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle \geq 0$ (> 0, falls T injektiv ist). Wendet man dies auf T^* statt T an, so erhält man die entsprechende Aussage für TT^*. □

2.44. Lemma. *Sind $(\mathcal{H}_j, \langle\cdot,\cdot\rangle_j)$, $j = 1, 2$, zwei Hilberträume, so ist ein Operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ genau dann unitär, wenn er ein isometrischer Isomorphismus ist.*

Beweis. Ist T unitär, so ist T nach Definition des unitären Operators bijektiv (da er die Umkehrabbildung T^* besitzt). Ferner gilt in diesem Fall für alle $x \in \mathcal{H}_1$:

$$\|Tx\|_2^2 = \langle Tx, Tx\rangle_2 = \langle T^*Tx, x\rangle_1 = \langle x, x\rangle_1 = \|x\|_1^2 \,,$$

so daß T also ein isometrischer Isomorphismus ist.

Ist umgekehrt T ein isometrischer Isomorphismus, so folgt für alle $x \in \mathcal{H}_1$:

$$\langle x, x\rangle_1 = \|x\|_1^2 = \|Tx\|_2^2 = \langle Tx, Tx\rangle_2 = \langle T^*Tx, x\rangle_1$$

und damit $\langle(1_{\mathcal{H}_1} - T^*T)x, x\rangle_1 = 0$. Nach Folgerung 2.38 muß also $T^*T = 1_{\mathcal{H}_1}$ gelten. Da T invertierbar ist folgt $T^{-1} = T^*$. Mit T ist auch $T^{-1} = T^*$ ein isometrischer Isomorphismus. Wenden wir die obige Überlegung auf T^* statt T an, so erhalten wir auch $TT^* = 1_{\mathcal{H}_2}$. □

2.45. Lemma. *Sei $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Prä–Hilbertraum. Für hermitesche Operatoren $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ gilt: Für alle $x \in \mathcal{H}$ ist $\langle Tx, x\rangle$ reell und*

$$\|T\| = q(T) := \sup\{|\langle Tx, x\rangle| \,;\, x \in \mathcal{H}, \|x\| \leq 1\} \,.$$

Beweis. Die erste Aussage folgt unmittelbar aus Definition 2.37 und (S3). Mit Hilfe der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung sieht man $q(T) \leq \|T\|$. Wegen $B_T(x, y) = \langle Tx, y\rangle$ folgt aus der Polarisierungsidentität für B_T:

$$\forall x, y \in \mathcal{H}: \quad \mathrm{Re}\langle Tx, y\rangle = \frac{1}{4}(\langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle) \,. \tag{2.10}$$

Zu gegebenen $x, y \in \mathcal{H}$ mit $\|x\| \leq 1$ und $\|y\| \leq 1$ gibt es ein $\alpha \in \mathbb{K}$ mit $|\alpha| = 1$ und $|\langle Tx, y\rangle| = \alpha\langle Tx, y\rangle = \langle T(\alpha x), y\rangle$. Durch Anwenden von (2.10) auf αx und y erhalten wir also

$$|\langle Tx,y\rangle| = \mathrm{Re}\langle T(\alpha x),y\rangle = \frac{1}{4}(\langle T(\alpha x+y),\alpha x+y\rangle - \langle T(\alpha x-y),\alpha x-y\rangle)$$
$$\le \frac{1}{4}q(T)(\|\alpha x+y\|^2+\|\alpha x-y\|^2) = \frac{1}{4}q(T)2(\|\alpha x\|^2+\|y\|^2) \le q(T)\,.$$

Also ist $\|T\| = \sup\{|\langle Tx,y\rangle|\,;\, x,y\in\mathcal{H}, \|x\|\le 1, \|y\|\le 1\} \le q(T)$ und die Behauptung ist bewiesen. □

2.46. Lemma. *Für einen stetigen linearen Operator T auf einem Hilbertraum $(\mathcal{H},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ gilt:*

(a) $\ker T = (\operatorname{ran} T^*)^\perp$.
(b) $\ker T^* = (\operatorname{ran} T)^\perp$.

Beweis. Wegen $T = T^{**}$ genügt es, die Aussage (a) zu beweisen. Für alle $x\in\mathcal{H}$ gilt: $x\in\ker T$ genau dann, wenn für alle $y\in\mathcal{H}$ gilt $\langle Tx,y\rangle = 0$. Dies ist nach Lemma 2.39 (a) äquivalent zu $\langle x,T^*y\rangle = 0$ für alle $y\in\mathcal{H}$, d.h. zu $x\in(\operatorname{ran} T^*)^\perp$. □

Die orthogonalen Projektionen auf einem Hilbertraum können wir nun auch wie folgt charakteriesieren:

2.47. Lemma. *Für einen stetigen linearen Operator P auf einem Hilbertraum $(\mathcal{H},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ mit $P = P^2$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *P ist orthogonale Projektion, d.h. es ist* $\operatorname{ran} P \perp \operatorname{ran}(1_{\mathcal{H}} - P)$.
(b) *$P = P^*$, d.h. P ist selbstadjungiert.*
(c) *P ist positiv.*

Beweis. Ist (a) erfüllt, so gilt für alle $x,y\in\mathcal{H}$:

$$\langle Px,y\rangle = \langle Px,Py+(1_{\mathcal{H}}-P)y\rangle = \langle Px,Py\rangle = \langle Px+(1_{\mathcal{H}}-P)x,Py\rangle = \langle x,Py\rangle\,.$$

Nach Lemma 2.39 (a) muß also $P = P^*$gelten.

Ist (b) erfüllt, so gilt für alle $x\in\mathcal{H}$ (unter Verwendung von Lemma 2.39 (a):

$$0 \le \langle Px,Px\rangle = \langle P^*Px,x\rangle = \langle P^2x,x\rangle = \langle Px,x\rangle\,.$$

P ist also positiv.

Ist P positiv, so ist P nach Lemma 2.43 selbstadjungiert und es folgt wegen

$$\operatorname{ran}(1_{\mathcal{H}} - P) = \ker P = \ker P^*$$

aus Lemma 2.46, daß (a) gelten muß. □

Übungsaufgaben zu Kapitel 2.

2.1. Aufgabe. (a) Sei $(\mathcal{H},\|\cdot\|)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$, für den die Parallelogrammgleichung

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2+\|y\|^2) \quad \forall\, x,y\in\mathcal{H}$$

gilt. Zeigen Sie, daß durch

$$\langle x,y\rangle := \begin{cases} \frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2) & \text{falls } \mathbb{K}=\mathbb{R} \\ \\ \frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x+iy\|^2-i\|x-iy\|^2) & \text{falls } \mathbb{K}=\mathbb{C} \end{cases}$$

ein Skalarprodukt auf $\mathcal{H}$ definiert wird mit $\|\cdot\| = \langle\cdot\,,\,\cdot\rangle^{1/2}$.

(b) Sei $(\mathcal{H}, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Prä-Hilbertraum und seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen aus der Einheitskugel von $\mathcal{H}$ mit $\langle x_n, y_n\rangle \to 1$ für $n \to \infty$. Zeigen Sie, daß dann $\|x_n - y_n\| \to 0$ für $n \to \infty$.

2.2. Aufgabe. Zu $\lambda \in \mathbb{R}$ betrachte man die Funktion

$$f_\lambda : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f_\lambda(x) := e^{i\lambda x}.$$

(a) Zeigen Sie, daß auf $X := \mathrm{LH}\{f_\lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ durch

$$\langle f, g\rangle := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

ein Skalarprodukt gegeben ist.

(b) Zeigen Sie, daß X nicht separabel ist.

Hinweis: Betrachten Sie f_λ, f_μ mit $\lambda \neq \mu$.

2.3. Aufgabe. Auf dem Raum $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ der komplexwertigen, quadratsummierbaren Folgen versehen mit dem Skalarprodukt $\langle (x_n), (y_n)\rangle_{\ell^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x_n\overline{y_n}$ betrachte man den Operator

$$S : \ell^2(\mathbb{N}_0) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{N}_0), \quad (x_0, x_1, x_2, \ldots) \mapsto (0, x_0, x_1, \ldots),$$

den sog. *Rechtsshift.*

(a) Zeigen Sie, daß S eine Isometrie ist. Ist S (links-, rechts-)invertierbar, und wenn ja, wie sieht die (Links-, Rechts-)Inverse aus?

(b) Zeigen Sie, daß das Bild von S abgeschlossen ist und die Kodimension 1 in $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ hat.

(c) Existiert der Grenzwert $\lim_{n\to\infty}\langle S^n x, y\rangle$ für alle $x, y \in \ell^2(\mathbb{N}_0)$?

2.4. Aufgabe. Sei G eine Menge und sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ ein Hilbertraum von $\mathbb{C}$–wertigen Funktionen auf G. Eine Abbildung $K : G \times G \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt *reproduzierender Kern von H*, wenn gilt

(i) die Abbildung $K_y : G \longrightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto K(x, y)$ ist ein Element von H für alle $y \in G$.

(ii) $f(y) = \langle f, K_y\rangle_H$ für alle $f \in H$ und alle $y \in G$.

Zeigen Sie:

(a) Ist K ein reproduzierender Kern von H, so gilt:

$$|f(y)| \leq \|f\|_H \sqrt{K(y, y)} \quad \text{für alle } y \in G,\ f \in H.$$

(b) Es gibt genau dann einen reproduzierenden Kern K von H, wenn für alle $x \in G$ die Abbildung $\delta_x : H \longrightarrow \mathbb{C}$, $f \mapsto f(x)$ stetig ist.

(c) Vermöge $\langle f, g\rangle := \int_{B_r(0)} f(z)\overline{g(z)}\, dz$ wird der Bergmann-Raum $A^2(B_r(0))$ zu einem Hilbertraum (siehe auch Aufgabe 1.10). Zeigen Sie, daß

$$K : B_r(0) \times B_r(0) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (\zeta, z) \mapsto \frac{r^2}{\pi} \frac{1}{(r^2 - \bar{z}\zeta)^2}$$

ein reproduzierender Kern von $A^2(B_r(0))$ ist.

2.5. Aufgabe. (a) Bestimmen Sie Orthonormalbasen von $A^2(\mathbb{D})$ und $H^2(\mathbb{D})$.

(b) Sei $K : G \times G \longrightarrow \mathbb{C}$ reproduzierender Kern eines Hilbertraumes $\mathcal{H}$ von komplexwertigen Funktionen auf einer Menge G (siehe Aufgabe 2.4) und $(e_i)_{i\in I}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$. Zeigen Sie, daß für alle $(x, y) \in G \times G$ gilt:

$$K(x, y) = \sum_{i\in I} e_i(x)\overline{e_i(y)}.$$

Überprüfen Sie dies am Beispiel der Bergmannschen Kernfunktion und der Orthnormalbasis aus (a).

2.6. Aufgabe. Zeigen Sie: Für einen unendlichdimensionalen Hilbertraum $\mathcal{H}$ sind äquivalent:

(a) $\mathcal{H}$ hat die Hilbertraumdimension $\aleph_0$.
(b) $\mathcal{H}$ besitzt eine abzählbare Orthonormalbasis.
(c) $\mathcal{H}$ ist isometrisch isomorph zu $\ell^2(\mathbb{N}_0)$.
(c) $\mathcal{H}$ ist separabel.

KAPITEL 3

Der abstrakte Mittag–Leffler-Satz und der Satz von Baire

Der folgende abstrakte Satz von Arens aus der Theorie der metrischen Räume hat viele bemerkenswerte Anwendungen in der Topologie und in der Funktionalanalysis. Bourbaki [**5**] hat ihn Mittag–Leffler–Satz genannt, weil man mit seiner Hilfe auch sehr elegant den klassischen Satz von Mittag–Leffler aus der Funktionentheorie beweisen kann.

3.1. Abstrakter Mittag–Leffler–Satz (Arens, 1958, Theorem 2.4 in [**3**]). *Sei $(X_n, d_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von vollständigen metrischen Räumen und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von stetigen Abbildungen $f_n : X_{n+1} \to X_n$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}_0$ das Bild $f_n(X_{n+1})$ dicht in (X_n, d_n) liegt. Dann liegt die Menge*

$$M_0 := \{v_0 \in X_0\,;\, \exists (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ mit } v_n \in X_n, f_{n-1}(v_n) = v_{n-1} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\} \tag{3.1}$$

und somit auch

$$M := \bigcap_{n=0}^{\infty} (f_0 \circ f_1 \circ \cdots \circ f_n)(X_{n+1}) \tag{3.2}$$

dicht in (X_0, d_0).

Ist also $X_0 \neq \emptyset$ so ist auch der Durchschnitt M in (3.2) nicht leer, eine Aussage, die keineswegs offensichtlich ist.

Beweis. Seien $x \in X_0$ und $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wir wollen zeigen, daß es einen Punkt $v_0 \in M$ gibt mit $d_0(x, v_0) \leq \varepsilon$. Um dies zu erreichen, konstruieren wir zunächst induktiv eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit den folgenden Eigenschaften:

$$y_n \in X_n \quad \text{und} \quad d_n(y_n, f_n(y_{n+1})) \leq \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\,, \tag{3.3}$$

$$d_k((f_k \circ f_{k+1} \circ \cdots \circ f_{n-1})(y_n), (f_k \circ f_{k+1} \circ \cdots \circ f_n)(y_{n+1})) \leq \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \tag{3.4}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $0 \leq k < n$. Wir setzen $y_0 := x$ und finden wegen der Dichtheit von $f_0(X_1)$ in X_0 ein $y_1 \in X_1$ mit $d_0(y_0, f_0(y_1)) < \varepsilon/2$. Damit sind die Bedingungen (3.3) und (3.4) für $n = 0$ erfüllt.

Seien nun für ein $m \in \mathbb{N}$ schon die Punkte $y_0, \ldots, y_m$ so konstruiert, daß die Bedingungen (3.3) und (3.4) für $0 \leq n \leq m-1$ und $0 \leq k < n$ erfüllt sind. Da $f_m(X_{m+1})$ in X_m dicht liegt, gibt es eine Folge $(z_j)_{j=1}^{\infty}$ in X_{m+1} mit $f_m(z_j) \to y_m$ für $j \to \infty$. Wegen der Stetigkeit der Abbildungen $f_0, \ldots, f_{m-1}$ folgt dann auch für alle $k = 0, \ldots, m-1$:

$$\lim_{j\to\infty} d_k((f_k \circ f_{k+1} \circ \cdots \circ f_{m-1})(y_m), (f_k \circ f_{k+1} \circ \cdots \circ f_m)(z_j)) = 0\,.$$

Insbesondere gibt es ein $j_0 \in \mathbb{N}$ so daß mit $y_{m+1} := z_{j_0}$ die Bedingungen (3.3) und (3.4) auch für $n = m$ und $0 \leq k < m$ erfüllt sind. Damit haben wir die gewünschte Folge konstruiert.

Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ sei nun

$$u_{k,0} := y_k \text{ und } u_{k,j} := (f_k \circ \cdots \circ f_{k+j-1})(y_{k+j}) \text{für alle } j \in \mathbb{N}\,.$$

Dann gilt nach (3.3) und (3.4) (mit dort $n = k + j$):

$$d_k(u_{k,j}, u_{k,j+1}) \leq \frac{\varepsilon}{2^{k+j+1}}$$

Für alle $j \in \mathbb{N}_0$, $p \in \mathbb{N}$ folgt hieraus durch vollständige Induktion mit Hilfe der Dreiecksungleichung:

$$(3.5) \qquad d_k(u_{k,j}, u_{k,j+p}) \leq \sum_{m=1}^{p} d_k(u_{k,j+m-1}, u_{k,j+m}) \leq \frac{\varepsilon}{2^{k+j}} \sum_{m=1}^{p} \frac{1}{2^m} < \frac{\varepsilon}{2^{k+j}} \to 0$$

für $j \to \infty$. Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ ist also die Folge $(u_{k,j})_{j=0}^{\infty}$ eine Cauchyfolge in dem vollständigen metrischen Raum (X_k, d_k) und daher konvergent in (X_k, d_k) gegen ein $v_k \in X_k$. Es gilt für alle $k \in \mathbb{N}_0$:

$$f_k(u_{k+1,j}) = f_k\left(\left(f_{k+1} \circ \cdots \circ f_{k+1+j}\right)(y_{k+1+j})\right) = u_{k,j+1} \to v_k \quad \text{für } j \to \infty$$

und wegen der Stetigkeit von f_k auch

$$v_k = \lim_{j\to\infty} f_k(u_{k+1,j}) = f_k\left(\lim_{j\to\infty} u_{k+1,j}\right) = f_k(v_{k+1})\,.$$

Insbesondere ist $v_0 \in M_0$. Ferner folgt wegen der Stetigkeit der Metrik d_0 unter Verwendung von (3.5) für $k = j = 0$:

$$d_0(x, v_0) = d_0(y_0, v_0) = d_0\Big(u_{0,0}, \lim_{p\to\infty} u_{0,p}\Big) = \lim_{p\to\infty} d_0(u_{0,0}, u_{0,p}) \leq \limsup_{p\to\infty} \varepsilon \sum_{m=1}^{p} \frac{1}{2^m} = \varepsilon\,.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Wir zeigen, daß man den klassische Satz von Mittag–Leffler tatsächlich mit Hilfe dieses abstrakten Mittag-Leffler-Satzes beweisen kann. Hierzu benötigen wir ein topologisches Lemma:

3.2. Lemma. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und nicht leer. Dann gibt es eine Folge $(K_n)_{n=0}^{\infty}$ von kompakten kompakten Teilmengen von Ω mit den beiden folgenden Eigenschaften:*

(a) $\forall n \in \mathbb{N}: \qquad \emptyset \neq \operatorname{int} K_0 \subset K_n \subset \operatorname{int} K_{n+1} \subset \Omega = \bigcup_{k=0}^{\infty} K_k$, *d.h. $(K_n)_{n=0}^{\infty}$ ist eine kompakte Ausschöpfung von Ω.*

(b) *Für alle $n \in \mathbb{N}$ und jede Zusammenhangskomponente G von $\hat{\mathbb{C}} \setminus K_n$ ist $G \cap (\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega)$ nicht leer.*

Beweis. Ist $\Omega = \mathbb{C}$, so leistet $K_n := \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| \leq n+1\}$ das Gewünschte. Sei nun $\Omega \neq \mathbb{C}$. Da Ω nicht leer und offen ist gibt es ein $z_0 \in \Omega$ und ein $\varepsilon \in (0,1)$ mit $K_0 := \overline{U_\varepsilon(z_0)} \subset \Omega$. Wir setzen für alle $n \in \mathbb{N}$

$$K_n := \{z \in \Omega\,;\, |z - z_0| \leq n \quad \text{und} \quad \operatorname{dist}(z, \partial\Omega) \geq 1/n\}\,.$$

Damit ist (a) erfüllt. Ist G die unbeschränkte Zusammenhangskomponente von $\hat{\mathbb{C}} \setminus K_n$, so ist $\infty \in G \cap (\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega)$. Sei nun G eine beliebige beschränkte Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus K_n$. Da $\{z \in \mathbb{C}\,;\, |z - z_0| > n\}$ in der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus K_n$ enthalten ist, folgt $G \subseteq \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| < n \text{ und } \operatorname{dist}(z, \mathbb{C} \setminus \Omega < 1/n)\}$. Ist w_0 also ein fester Punkt aus G und $w_1 \in \partial\Omega$ mit $|w_1 - w_0| = \operatorname{dist}(w_0, \mathbb{C} \setminus \Omega)$, so ist $\{(1-t)w_0 + tw_2\}$ eine zusammenhängende in $\mathbb{C} \setminus K_n$ enthaltene Strecke, die einen nicht leeren Schnitt mit der Zusammenhangskomponente G hat und daher in G enthalten ist. Insbesondere ist $w_1 \in G \cap (\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega)$. □

Für auf Ω holomorphe Funktionen f und alle $n \in \mathbb{N}$ definieren wir dann

$$q_n(f) := \max_{z \in K_n} |f(z)| .$$

Dann wird der Raum $\mathcal{O}(\Omega)$ der auf Ω holomorphen Funktionen zu einem vollständigen metrischen Raum vermöge der durch

$$d(f,g) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n(f-g)}{1+q_n(f-g)} \qquad (f,g \in \mathcal{O}(\Omega)).$$

Die Konvergenz bezüglich dieser Metrik ist gerade die gleichmäßige Konvergenz auf allen kompakten Teilmengen von Ω. Diese Metrik ist *translationsinvariant* in dem Vektorraum $\mathcal{O}(\Omega)$, d.h. es gilt

$$\forall f,g,h \in \mathcal{O}(\Omega) \qquad d(f+h,g+h) = d(f,g) .$$

3.3. Definition. Unter einem *Hauptteil mit dem Entwicklungspunkt* $w \in \mathbb{C}$ verstehen wir jede rationale Funktion der Form

$$h_w(z) := \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{-j}}{(z-w)^j} \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}, a_{-1}, \ldots, a_{-n} \in \mathbb{C} .$$

Eine *Hauptverteilung* H auf einer offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ist eine Menge $H = \{h_w\,; w \in A\}$ von Hauptteilen mit Entwicklungspunkten in einer in Ω diskreten Teilmenge A von Ω.

Jede auf einer offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ meromorphe Funktion f definiert eine Hauptverteilung $H_f = \{h_{f,w}\,;\, w \in P_f\}$ wie folgt: Für jede Polstelle w von f gibt es ein $r_w > 0$ mit $D(w,r_w) \subseteq \Omega$ und $D(w,r_w) \cap P_f = \{w\}$. Für alle Polstellen $w \in P_f$ sei $h_{f,w}$ der Hauptteil

$$\sum_{j=1}^{m_w} \frac{a_{-j}}{(z-w)^j}$$

der Laurentreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-m_w}^{\infty} a_n (z-w)^n$$

in $R_{0,r_w}(w)$. m_w bezeichne hierbei die Ordnung der Polstelle w von f. Offensichtlich gilt für jede auf ganz Ω holomorphe Funktion g: $H_{f+g} = H_f$.

3.4. Definition. Eine Hauptverteilung H auf einer offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ heißt *lösbare Hauptverteilung*, falls es eine auf Ω meromorphe Funktion f mit $H_f = H$ gibt.

Ist f mit $H_f = H$ eine Lösung der Hauptverteilung H in Ω, so ist für jede auf Ω holomorphe Funktion g auch $H_{f+g} = H$ und somit auch $f+g$ eine Lösung der Hauptverteilung H.

Der klassische Satz von Mittag-Leffler besagt, daß jede Hauptverteilung lösbar ist.

3.5. Satz (Mittag–Leffler). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, A eine in Ω diskrete Menge und sei $H = \{h_w\,;\, w \in A\}$ eine Hauptverteilung in Ω. Dann gibt es eine Funktion $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ mit $H_f = H$. f ist hierdurch bis auf eine additive Abänderung durch eine auf ganz Ω holomorphe Funktion eindeutig bestimmt. Ist also auch $F \in \mathcal{M}(\Omega)$ eine meromorphe Funktion mit $H_F = H$ so ist $g := F - f \in \mathcal{O}(\Omega)$.*

Beweis. Wir zeigen nur die Existenz der Lösung der Hauptverteilung, da die Eindeutigkeitsaussage unmittelbar klar ist. Sei $(K_n)_{n=0}^{\infty}$ eine kompakte Ausschöpfung von Ω mit O.B.d.A. $\Omega_0 := \operatorname{int} K_0 \neq \emptyset$. Wir setzen $\Omega_n := \operatorname{int} K_n$. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ sei δ_n eine (wie oben angegebene) Metrik auf $\mathcal{O}(\Omega_n)$, so daß also die zugehörige Konvergenz die Konvergenz auf allen kompakten Teilmengen von Ω_n ist. Da A keine Häufungspunkte in Ω hat ist $A \cap K_n$ und somit auch $A_n := A \cap \Omega_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ eine endliche Punktmenge oder leer. Daher ist

$$r_n := \sum_{a \in A_n} h_a$$

eine rationale Funktion. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ sei nun X_n die Menge aller derjenigen auf Ω_n meromorphen Funktionen, für die die Funktion $f - r_n$ nur hebbare Singularitäten in Ω_n hat und somit eine (auch mit $f - r_n$ bezeichnete) holomorphe Fortsetzung auf ganz Ω_n besitzt. Da $(\mathcal{O}(\Omega_n), \delta_n)$ ein vollständiger metrischer Raum ist, ist auch X_n versehen mit der durch

$$d_n(f,g) := \delta_n(f - r_n, g - r_n) \qquad (f, g \in \mathcal{O}(\Omega_n))$$

gegebenen Metrik vollständig. Eine Folge $(f_k)_{k=1}\infty$ aus X_n ist genau dann konvergent, wenn die Folge $(f_k - r_n)_{k=1}^{\infty}$ in $\mathcal{O}(\Omega_n)$ konvergent ist. Insbesondere sind also für alle $n \in \mathbb{N}$ die Restriktionsabbildungen

$$\rho_n : X_{n+1} \to X_n\,, \qquad f \mapsto f|_{\Omega_n}$$

folgenstetig, also stetig.

Wir zeigen, daß das Bild von ρ_n in X_n dicht liegt. Sei also $f \in X_n$ beliebig vorgegeben. Da

$$r_{n+1} - r_n = \sum_{a \in A_{n+1} \setminus A_n} h_a$$

eine rationale Funktion ist, die keine Polstellen in Ω_n besitzt, ist $f - r_{n+1}$ auf Ω_n holomorph (ergänzbar). Sei $(H_k)_{k=0}^{\infty}$ eine kompakte Ausschöpfung von Ω_n wie in Lemma 3.2. Ist $k \in \mathbb{N}_0$ beliebig und G eine beliebige Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus H_k$, so existiert nach Lemma 3.2 ein $w \in (\mathbb{C} \setminus \Omega_n) \cap G$. Nach Definition von Ω_n ist $w \in \overline{\mathbb{C} \setminus K_n}$. Da G offen ist, gibt es eine Zusammenhangskomponente G_1 von $\mathbb{C} \setminus K_n$ mit $G_1 \cap G \neq \emptyset$. Da G_1 zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{C} \setminus K_n \subseteq \mathbb{C} \setminus H_k$ ist, folgt $G_1 \subseteq G$. Nach Lemma 3.2 existiert ein Punkt $z_{n,k} \in G_1 \cap (\mathbb{C} \setminus \Omega) \subseteq G \cap (\mathbb{C} \setminus \Omega)$. Nach dem Satz von Runge gibt es eine rationale Funktion $\varphi_{n,k}$ mit Polen höchstens in $\mathbb{C} \setminus \Omega$ und mit

$$\sup_{z \in H_k} |\varphi_{n,k}(z) - (f(z) - r_{n+1}(z))| < 2^{-k}.$$

Also konvergiert die Folge $(\varphi_{n,k})_{k=1}^{\infty}$ gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von Ω_n gegen $f - r_{n+1}(z)$. Mit $g_k := (\varphi_{n,k} - r_{n+1})|_{\Omega_{n+1}}$ folgt $g_k \in X_{n+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und

$$d_n(\rho_n(g_k), f) = \delta_n(\varphi_{n,k} + r_{n+1} - r_n, f - r_n) = \delta_n(\varphi_{n,k}, f - r_{n+1}) \to 0 \qquad \text{für } k \to \infty.$$

Also liegt $\rho_n(X_{n+1})$ dicht in (X_n, d_n) und die Voraussetzungen zum abstrakten Satz von Mittag-Leffler sind erfüllt. Es gibt somit eine Folge $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ mit $f_n \in X_n$ und $\rho_n(f_{n+1}) = f_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Die durch $g(z) := f_n(z)$ für alle $z \in \Omega_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, definierte Funktion ist also wohldefiniert und auf Ω meromorph mit Hauptteil h_a für alle $a \in A$. □

Zwei Metriken

$$d_1, d_2 : X \times X \to [0, \infty)$$

auf einer nicht leeren Menge X heißen *äquivalent*, falls eine Menge $G \subseteq X$ genau dann bezüglich d_1 offen ist, wenn sie bezüglich d_2 offen ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Identität $\operatorname{id} : X \to X$ eine Homöomorphie ist.

3.6. Lemma. *Sei U eine nicht leere offene Teilmenge eines metrischen Raums. Dann ist die von d auf U induzierte Metrik $d|_{U\times U} : U \times U \to [0,\infty)$ äquivalent zu der durch*

$$d_U(x,y) := d(x,y) + \left|\operatorname{dist}(x, X\setminus U)^{-1} - \operatorname{dist}(y, X\setminus U)^{-1}\right| \qquad x,y \in U$$

(mit der Vereinbarung $\operatorname{dist}(x,\emptyset)^{-1} := 0$*) auf U definierten Metrik $d_U : U\times U \to [0,\infty)$. Ist (X,d) vollständig, so ist auch (U,d_U) vollständig.*

Beweis. Da die Behauptung im Fall $U = X$ offensichtlich gilt, betrachten wir nur den Fall $U \neq X$, d.h. $X\setminus U \neq \emptyset$. Daß d_U eine Metrik auf U definiert, rechnet man unmittelbar nach. Für alle $x, y \in U$ ist $d(x,y) \leq d_U(x,y)$. Also gilt für jedes $\varepsilon > 0$, $x \in U$: Die ε-Umgebung bezüglich d_U von x ist enthalten in der ε-Umgebung bezüglich $d|U\times U$ von x. Insbesondere ist jede bezüglich $d_{U\times U}$ offene Teilmenge auch bezüglich d_U offen, d.h.: $\mathrm{id} : (U,d_U) \to (U, d|_{U\times U})$ ist stetig.

Sei nun $(x_n)_{n=1}^\infty$ eine beliebige gegen ein $a \in U$ bezüglich d konvergente Folge aus U. Wegen der Stetigkeit von $\operatorname{dist}(\cdot, X\setminus U) : U \to \mathbb{R}$ gilt dann auch

$$\operatorname{dist}(x_n, X\setminus U) \to \operatorname{dist}(a, X\setminus U) > 0 \qquad \text{für } n\to\infty.$$

und somit

$$d_U(x_n,a) := d(x_n,a) + \left|\operatorname{dist}(x_n, X\setminus U)^{-1} - \operatorname{dist}(a, X\setminus U)^{-1}\right| \to 0 \qquad \text{für } n\to\infty.$$

Also ist auch $\mathrm{id} : (U, d_{U\times U}) \to (U, d|_U)$ stetig. Damit ist die Äquivalenz der beiden Metriken gezeigt.

Sei nun (X,d) vollständig und sei $(x_n)_{n=1}^\infty$ eine beliebige Cauchyfolge in (U,d_U). Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n,m \geq n_0: \qquad d(x_n,x_m) \leq d_U(x_n,x_m) < \varepsilon. \tag{3.6}$$

Insbesondere ist $(x_n)_{n=1}^\infty$ auch eine Cauchyfolge bezüglich d und daher (wegen der Vollständigkeit von (X,d)) bezüglich d konvergent gegen ein $a \in \overline{U}$. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig und $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

(3.7)

$$\begin{aligned}\forall n \geq n_0\, \forall p \in \mathbb{N} : d_U(x_n, x_{n+p}) =& d(x_n,x_{n+p}) + \left|\operatorname{dist}(x_n, X\setminus U)^{-1} - \operatorname{dist}(x_{n+p}, X\setminus U)^{-1}\right| \\ <& \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Wegen $d(x_n,x_{n+p}) \to d(x_n,a)$ und $\operatorname{dist}(x_{n+p}, X\setminus U) \to \operatorname{dist}(a, X\setminus U)$ für $p\to\infty$ ist dies nur möglich, wenn $\operatorname{dist}(a, X\setminus U) > 0$ und somit $a \in U$ gilt. Führen wir nun in (3.7) den Grenzübergang für $p\to\infty$ durch, so erhalten wir für alle $n \geq n_0$:

$$d_U(x_n,a) = d(x_n,a) + \left|\operatorname{dist}(x_n, X\setminus U)^{-1} - \operatorname{dist}(a, X\setminus U)^{-1}\right| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Also gilt $x_n \to a$ in dem metrischen Raum (U,d_U) für $n\to\infty$. Damit ist die Vollständigkeit von (U,d_U) bewiesen. □

3.7. Bemerkung. Der Durchschnitt $U\cap V$ von zwei dichten offenen Teilmengen U, V eines metrischen Raums (X,d) ist ebenfalls dicht in (X,d).

Beweis. Sind $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben, so gibt es wegen der Dichtheit von U in (X,d) ein $u \in U \cap U_\varepsilon(x)$. Da $U\cap U_\varepsilon(x)$ offen ist gibt es ein $\delta \in (0,\varepsilon/2)$ mit $U_\delta(u) \subseteq U\cap U_\varepsilon(x)$. Da auch V dicht liegt in (X,d), gibt es ein $v \in V\cap U_\delta(u) \subseteq V\cap U\cap U_\varepsilon(x)$. Also enthält jede ε–Umgebung von x ein Element von $U\cap V$. Daher liegt $U\cap V$ dicht in (X,d). □

Insbesondere folgt mit dieser Bemerkung durch vollständige Induktion, daß endliche Durchschnitte dichter, offener Teilmengen eines metrischen Raums wieder dichte, offene Teilmengen sind.

3.8. Satz von Baire. *Sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum und $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Familie von dichten, offenen Teilmengen von X. Dann ist auch $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ dicht in (X,d).*

Beweis. Wir setzen $(X_0,d) := (X,d)$ und definieren induktiv $X_{n+1} := X_n \cap U_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Nach der Vorbemerkung sind die Mengen X_n dichte, offene Teilmengen von (X,d) mit $X_{n+1} \subseteq X_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Versehen mit den Metriken $d_n := d_{X_n}$ sind die Räume (X_n, d_n) für alle $n \in \mathbb{N}$ vollständig. Da die Metriken d_n nach Lemma 3.6 äquivalent zu $d|_{X_n \times X_n}$ sind, sind die Inklusionsabbildungen $i_n : X_{n+1} \hookrightarrow X_n$ stetig mit dichtem Bild. Nach dem abstrakten Satz von Mittag-Leffler (Satz 3.1) ist also

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} X_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} (i_0 \circ i_1 \circ \cdots \circ i_n)(X_{n+1})$$

dicht in (X,d). □

Häufig wenden wir den Satz von Baire auch in folgender Form an:

3.9. Folgerung. *Sei $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge abgeschlossener Teilmengen eines vollständigen, nicht leeren metrischen Raums (X,d) mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X$. Dann ist $\operatorname{int} A_n \neq \emptyset$ für wenigstens ein $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Wir wenden den Satz von Baire an auf die Mengen $U_n := X \setminus A_n$, $n \in \mathbb{N}$. Wäre $\operatorname{int} A_n = \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so wäre $\overline{U_n} = X$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und daher nach dem Satz von Baire der Durchschnitt $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus A_n) = \emptyset$ dicht in (X,d) im Widerspruch zu $X \neq \emptyset$. □

3.10. Lemma. *Ist F ein Untervektorraum eines normierten Raums $(E, \|\cdot\|)$ mit $\operatorname{int} F \neq \emptyset$, so gilt schon $E = F$.*

Beweis. Hat F einen inneren Punkt f, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(f) = f + \varepsilon B_E \subset F$. Da F ein Untervektorraum von E ist, folgt dann $B_E = \frac{1}{\varepsilon}(U_\varepsilon(f) - f) \subset F$ und somit auch $E = \bigcup_{r>0} r B_E \subseteq F \subseteq E$. □

3.11. Folgerung. *Sei E ein $\mathbb{K}$–Vektorraum mit $\dim_{\mathbb{K}} E = \aleph_0$, d.h. es gibt eine abzählbar unendliche, linear unabhängige Teilmenge $\mathcal{B} = \{e_n; n \in \mathbb{N}\}$ von E mit $E = \mathrm{LH}(\mathcal{B})$. Dann gibt es keine Norm auf E bezüglich der E vollständig ist. Insbesondere ist also jeder unendlich dimensionale Banachraum schon überabzählbar unendlich dimensional.*

Beweis. Ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf E und $\mathcal{B} = \{e_n; n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbar unendliche, linear unabhängige Teilmenge von E mit $E = \mathrm{LH}(\mathcal{B})$, so folgt mit $F_n := \mathrm{LH}(\{e_1, \ldots, e_n\})$: F_n ist in $(E, \|\cdot\|)$ abgeschlossen (nach Folgerung 1.14) und erfüllt $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Wäre $(E, \|\cdot\|)$ vollständig, so gäbe es nach Folgerung 3.9 und Lemma 3.10 ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $E = F_{n_0}$ im Widerspruch zu $\dim_{\mathbb{K}} E = \aleph_0$. □

3.12. Definition. Sei (X,d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge A von X heißt

- *dicht in X*, falls $\overline{A} = X$.
- *nirgends dicht in X*, falls $\operatorname{int}(\overline{A}) = \emptyset$.
- *von erster Kategorie* oder *mager in X*, falls A abzählbare Vereinigung von in X nirgends dichten Teilmengen ist.
- *von zweiter Kategorie* oder *nicht mager in X*, falls A nicht von erster Kategorie in X ist.

3.13. Folgerung (Kategoriensatz von Baire). *Jeder nicht leere vollständige metrische Raum ist von zweiter Kategorie in sich.*

Beweis. Sei $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von nirgends dichten Teilmengen von X. Dann ist $X \setminus \overline{A_n}$ offen und dicht in X für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach dem Satz von Baire ist dann aber auch die Menge

$$G := \bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus \overline{A_n}) = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$$

dicht in X. Wegen $X \neq \emptyset$ muß $X \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$ gelten. Also ist X von zweiter Kategorie in sich. $\square$

Übungsaufgaben zu Kapitel 3.

3.1. Aufgabe. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger komplexwertiger Funktionen auf einem vollständigen metrischen Raum X, so daß $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existiert für alle $x \in X$.

(a) Zeigen Sie, daß eine nichtleere offene Teilmenge V in X und ein $0 < M < \infty$ existieren, so daß $\sup\{|f_n(x)| : x \in V, n \in \mathbb{N}\} < M$ ist.
(b) Sei $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie, daß eine nichtleere offene Teilmenge V in X und eine natürliche Zahl N existieren, so daß $|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$ ist für alle $x \in V$ und $n \geq N$.
Hinweis: Betrachte für $N \in \mathbb{N}$ die Mengen $A_N := \{x \in X, |f_m(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon \text{ für } m, n \geq N\}$.

3.2. Aufgabe. Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, $X \neq \emptyset$. Ein Punkt $x_0 \in X$ heißt *isoliert*, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $U_\varepsilon(x_0) = \{x_0\}$. Zeigen Sie:

(a) Hat (X, d) keine isolierten Punkte, so ist X überabzählbar.
(b) Ist X abzählbar, so liegt die Menge der isolierten Punkte dicht in (X, d).

3.3. Aufgabe. Sei f eine auf $\mathbb{R}$ definierte, reellwertige Funktion. Ist I ein nicht zu einem Punkt ausgeartetes Intervall, so heißt

$$\omega_f(I) := \sup_{x\in I} f(x) - \inf_{x\in I} f(x)$$

die *Oszillation von f auf I*. Zeigen Sie:

(a) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ existiert der Grenzwert
$$\omega_f(x) := \lim_{\delta\to 0} \omega_f((x-\delta, x+\delta))$$
in $[0, \infty]$; er heißt die *Oszillation von f in x*.
(b) Die Menge $\{x \in \mathbb{R} : \omega_f(x) \geq \varepsilon\}$ ist abgeschlossen für alle $\varepsilon > 0$.
(c) Die Menge
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R} : \omega_f(x) \geq \frac{1}{n}\}.$$
ist die Menge aller Unstetigkeitspunkte von f.
(d) Die Menge der Unstetigkeitspunkte von f ist genau dann von erster Kategorie in $\mathbb{R}$, wenn es eine dichte Menge gibt, in deren Punkten f stetig ist.

3.4. Aufgabe. Zeigen Sie: Es gibt stetige Funktionen auf $[0, 1]$, die an keiner Stelle differenzierbar sind.
Hinweis: Betrachte $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ mit

$$E_n := \left\{ f \in C[0,1]\,;\ \sup_{0<|h|\leq 1} \left| \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \right| > n \quad \forall\, t \in [0,1] \right\}.$$

KAPITEL 4

Der Satz von Banach–Steinhaus

4.1. Definition. Seien $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ zwei normierte $\mathbb{K}$–Vektorräume. Eine Familie $\mathcal{A}$ linearer Abbildungen von E nach F heißt *gleichstetig*, falls es zu jeder Nullumgebung U in $(F, \|\cdot\|_F)$ eine Nullumgebung V in $(E, \|\cdot\|_E)$ gibt mit $\mathcal{A}(V) := \{Av; A \in \mathcal{A}, v \in V\} \subseteq U$. Dies ist genau dann der Fall, wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall A \in \mathcal{A}\, \forall x \in E: \quad \|x\|_E < \delta \Longrightarrow \|Ax\|_F < \varepsilon.$$

Dies ist wiederum äquivalent zu

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall A \in \mathcal{A}\, \forall x \in E: \quad \|x\|_E \leq \delta \Longrightarrow \|Ax\|_F \leq \varepsilon.$$

Insbesondere ist jede gleichstetige Menge von linearen Abbildungen von E nach F schon in $\mathcal{L}(E, F)$ enthalten.

4.2. Lemma. *Seien $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ zwei normierte $\mathbb{K}$–Vektorräume. Für $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(E, F)$ gilt:*

(a) *Ist $\mathcal{A}$ gleichstetig, so ist für jede in $(E, \|\cdot\|_E)$ beschränkte Menge B auch die Menge $\mathcal{A}(B) := \{Ax; A \in \mathcal{A}, x \in B\}$ beschränkt in $(F, \|\cdot\|_F)$. Insbesondere ist für alle $x \in E$ die Menge $\mathcal{A}(x) := \{Ax; A \in \mathcal{A}\}$ beschränkt in $(F, \|\cdot\|_F)$.*

(b) *Genau dann ist $\mathcal{A}$ gleichstetig, wenn* $\sup_{A \in \mathcal{A}} \|A\| < \infty$ *, d.h. wenn $\mathcal{A}$ in $\mathcal{L}(E, F)$ beschränkt ist.*

Beweis. (a) Sei $\mathcal{A}$ gleichstetig. Da B beschränkt in E ist existiert ein $C > 0$ mit $\|x\|_E \leq C$ für alle $x \in B$. Wegen der Gleichstetigkeit von $\mathcal{A}$ gibt es zu $\varepsilon = 1$ ein $\delta > 0$ so daß $\|Ax\|_F \leq 1$ für alle $A \in \mathcal{A}$ und alle $x \in E$ mit $\|x\|_E \leq \delta$. Damit gilt für alle $A \in \mathcal{A}$, $x \in B$:

$$\|Ax\|_F = \frac{C+1}{\delta} \left\| A\left(\frac{\delta}{C+1} x\right) \right\|_F < \frac{C+1}{\delta}.$$

Also ist $\mathcal{A}(B)$ beschränkt in $(F, \|\cdot\|_F)$. Da für alle $x \in E$ die Menge $\{x\}$ in $(E, \|\cdot\|_E)$ beschränkt ist folgt auch der Zusatz.

(b) "$\Longrightarrow$" erhalten wir, indem wir (a) auf die Einheitskugel B_E von E anwenden. Sei nun umgekehrt $C := \sup_{A \in \mathcal{A}} \|A\| < \infty$ und sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Für alle $x \in E$ mit $\|x\|_E < \delta := \frac{\varepsilon}{C+1}$ und alle $A \in \mathcal{A}$ gilt dann $\|Ax\|_F \leq C\|x\|_E < \varepsilon$. Also ist $\mathcal{A}$ gleichstetig. □

4.3. Satz von Banach–Steinhaus. *Seien $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ zwei normierte $\mathbb{K}$–Vektorräume und sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(E, F)$. Ist die Menge $B := \{x \in E;\ \mathcal{A}(x) \text{ ist beschränkt in } F\}$ von zweiter Kategorie in E, so gilt schon $B = E$ und $\mathcal{A}$ ist gleichstetig, also nach Lemma 4.2 beschränkt in $\mathcal{L}(E, F)$.*

Beweis. Als Durchschnitt von (wegen der Stetigkeit der Abbildungen $A \in \mathcal{A}$) abgeschlossenen Mengen ist die Menge $M := \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A^{-1}(B_F)$ abgeschlossen in $(E, \|\cdot\|_E)$. Für alle $x \in B$ existiert nach Definition von B ein $n_x \in \mathbb{N}$ mit $\|Ax\|_F \leq n_x$ für alle $A \in \mathcal{A}$. Es folgt $x \in n_x M$ und damit

$$B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} nM.$$

Da nach Voraussetzung die Menge B von zweiter Kategorie in E ist, muß für wenigstens ein $n_0 \in \mathbb{N}$ die Menge $n_0 M = \overline{n_0 M}$ nicht leeres Inneres haben. Nun ist die Abbildung $x \mapsto n_0 x$ eine Homöomorphie von E auf sich ist, so daß schon $\mathrm{int} M \neq \emptyset$ gilt. Insbesondere besitzt M einen inneren Punkt x_0. Es gibt also ein $\rho > 0$ mit $U_\rho(x_0) \subset M$. Für alle $u \in B_E$ gilt dann wegen $\frac{\rho}{2}u + x_0 \in U_\rho(x_0) \subset M$ und $x_0 \in M$:

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad \|Au\|_F = \frac{2}{\rho}\left\|A\left(\frac{\rho}{2}u + x_0\right) - Ax_0\right\|_F \leq \frac{4}{\rho}\,.$$

Also ist $\mathcal{A}$ in $\mathcal{L}(E, F)$ normbeschränkt und daher nach Lemma 4.2 (b) gleichstetig. □

4.4. Satz von der gleichmässigen Beschränktheit. *Sei $(E, \|\cdot\|_E)$ ein Banachraum und $(F, \|\cdot\|_F)$ ein normierter $\mathbb{K}$–Vektorraum. Für $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(E, F)$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) $\forall x \in E: \quad \sup_{A \in \mathcal{A}} \|Ax\|_F < \infty$.
(b) *$\mathcal{A}$ ist gleichstetig.*
(c) $\exists C > 0\, \forall x \in B_E\, \forall A \in \mathcal{A}: \quad \|Ax\|_F \leq C$.
(d) $\exists C > 0\, \forall x \in E\, \forall A \in \mathcal{A}: \quad \|Ax\|_F \leq C\|x\|_E$.
(e) $\sup_{A \in \mathcal{A}} \|A\| < \infty$.

Beweis. Die Äquivalenz von (c) und (d) zu (e) rechnet man unmittelbar nach. Nach Lemma 4.2 sind die Aussagen (b) und (e) äquivalent. (c)$\Longrightarrow$(a) ist offensichtlich und die Implikation (a)$\Longrightarrow$(b) ist eine unmittelbare Folgerung aus dem Satz 4.3 von Banach–Steinhaus und dem Kategoriensatz 3.13 von Baire. □

4.5. Satz. *Seien $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ zwei normierte $\mathbb{K}$–Vektorräume und sei $(A_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge in $\mathcal{L}(E, F)$.*

(a) *Ist die Menge*

$$C := \{x \in E\,;\, (A_n x)_{n=1}^\infty \text{ ist Cauchyfolge in } F\}$$

von zweiter Kategorie in E, so ist schon $C = E$ und $(A_n)_{n=1}^\infty$ ist gleichstetig.

(b) *Ist $(F, \|\cdot\|_F)$ vollständig und ist die Menge*

$$L := \{x \in E\,;\, Ax := \lim_{n\to\infty} A_n x \text{ existiert in } F\}$$

von zweiter Kategorie in E, so ist schon $L = E$ und die Abbildung $A : E \to F$ ist stetig und linear.

Beweis. (a) Ist $x \in C$, so ist $\{A_n x; n \in \mathbb{N}\}$ nach Lemma 1.3 in F beschränkt. Nach dem Satz 4.3 von Banach–Steinhaus ist die Folge $(A_n)_{n=1}^\infty$ also gleichstetig. Man rechnet leicht nach, daß C und damit auch $\overline{C}$ ein Untervektorraum von E ist. Da C von zweiter Kategorie in E ist, folgt $\mathrm{int}\overline{C} \neq \emptyset$ und damit nach Lemma 3.10 schon $\overline{C} = E$, d.h. C liegt dicht in E. Sei nun $x \in E$ beliebig und $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wegen der Gleichstetigkeit von $\{A_n; n \in \mathbb{N}\}$ gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$\forall n \in \mathbb{N}\, \forall u \in U_\delta(0): \quad \|A_n u\|_F < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Da C in E dicht liegt, gibt es ein $u \in C$ mit $\|x - u\|_E < \delta$ und da $\{A_n u; n \in \mathbb{N}\}$ eine Cauchyfolge ist gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n, m \geq n_0: \quad \|A_n u - A_m u\|_F < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Damit folgt für alle $n, m \geq n_0$

$$\|A_n x - A_m x\|_F \leq \|A_n(x - u)\|_F + \|A_n u - A_m u\|_F + \|A_m(u - x)\|_F < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\,.$$

Also ist $x \in C$ und es folgt $E = C$.

(b) Wegen der Vollständigkeit von F ist $L = C$. Nach Teil (a) folgt also $L = E$ und die Gleichstetigkeit der Folge $\{A_n; n \in \mathbb{N}\}$. Wegen der Linearität des Grenzwertes ist die hierdurch definierte Abbildung $A : E \to F$ linear. Nach Lemma 4.2 (b) ist $\{A_n; n \in \mathbb{N}\}$ normbeschränkt in $\mathcal{L}(E, F)$. Wegen der Stetigkeit der Norm folgt also für alle $x \in B_E$:

$$\|Ax\|_F = \lim_{n\to\infty} \|A_n x\|_F \leq \limsup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\| < \infty.$$

Also ist A stetig und $\|A\| \leq \limsup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\|$. □

4.6. Folgerung. *Sei $(E, \|\cdot\|_E)$ ein Banachraum und $(F, \|\cdot\|_F)$ ein normierter $\mathbb{K}$–Vektorraum und sei $(A_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge in $\mathcal{L}(E, F)$.*

(a) *Existiert für alle $x \in E$ der Grenzwert $Ax := \lim_{n\to\infty} A_n x$, so ist die hierdurch definierte Abbildung $A : E \to F$ linear und stetig.*
(b) *Ist auch F vollständig und ist für alle $x \in E$ die Folge $\{A_n x; n \in \mathbb{N}\}$ eine Cauchyfolge in F, so ist die durch $Ax := \lim_{n\to\infty} A_n x$, $x \in E$, definierte Abbildung linear und stetig.*

In beiden Fällen ist $\|A\| \leq \limsup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\|$.

Beweis. In beiden Fällen ist $C = L = E$. Nach dem Kategoriensatz 3.13 von Baire ist E von zweiter Kategorie in sich. Mit Satz 4.5 und dem zugehörigen Beweis folgen die Behauptungen. □

4.7. Folgerung. *Seien $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ zwei Banachräume und sei $(A_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge in $\mathcal{L}(E, F)$ mit*

(a) $\forall x \in E : \quad \{A_n x\, ;\, n \in \mathbb{N}\}$ *ist normbeschränkt in F.*
(b) $C := \{x \in E\, ;\, (A_n x)_{n=1}^\infty$ *ist Cauchyfolge in F*$\}$ *ist dicht in E.*

Dann ist schon $E = C$ und die durch $Ax := \lim_{n\to\infty} A_n x$, $x \in E$, definierte Abbildung ist linear und stetig.

Beweis. Nach dem Satz 4.4 von der gleichmäßigen Beschränktheit ist $(A_n)_{n=1}^\infty$ gleichstetig. Nach dem Beweis zu Satz 4.5 folgt aus der Dichtheit von C und der Gleichstetigkeit von $(A_n)_{n=1}^\infty$ die Behauptung. □

4.8. Satz. *Seien E, F, G normierte $\mathbb{K}$–Vektorräume und sei E vollständig. Für eine bilineare Abbildung $B : E \times F \to G$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *B ist stetig.*
(b) *B ist komponentenweise stetig, d.h. für alle $x \in E$ ist die Abbildung $y \mapsto B(x, y)$ stetig und für alle $y \in F$ ist die Abbildung $x \mapsto B(x, y)$ stetig.*
(c) *Für jede Nullfolge $(x_n)_{n=1}^\infty$ in E und alle $y \in F$ gilt $B(x_n, y) \to 0$ für $n \to \infty$ und für alle Nullfolgen $(y_n)_{n=1}^\infty$ in F und alle $x \in F$ gilt $B(x, y_n) \to 0$ für $n \to \infty$.*
(d) *B ist stetig in $(0, 0)$.*
(e) $\|B\| := \sup_{x\in B_E, y\in B_F} \|B(x, y)\|_G < \infty$.
(f) $\forall x \in E : \sup_{y\in B_F} \|B(x, y)\|_G < \infty$ *und* $\forall y \in F : \sup_{x\in B_E} \|B(x, y)\|_G < \infty$.

Beweis. Die Implikationen (a)$\Longrightarrow$(d) sowie (e)$\Longrightarrow$(f) sind klar und nach Lemma 1.8 sind die Aussagen (b), (c) und (f) äquivalent.

(b)$\Longrightarrow$(a): Sei $(x, y) \in E \times F$ beliebig und sei $(x_n, y_n) \to (x, y)$ in $E \times F$ für $n \to \infty$. Insbesondere gilt dann $x_n \to x$ und $y_n \to y$ für $n \to \infty$. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Nach Voraussetzung (b) gibt es ein $n_F \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \geq n_F : \quad \|B(x, y_n) - B(x, y)\|_G < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{4.1}$$

Ebenfalls nach Voraussetzung (b) ist $E = \{u \in E\,;\, (B(u, y_n))_{n=1}^{\infty}$ ist konvergent in $G\}$. Da E als Banachraum nach dem Kategoriensatz 3.13 von Baire von zweiter Kategorie in sich ist, folgt nach Satz 4.5, daß $(B(\cdot, y_n))_{n=1}^{\infty}$ eine gleichstetige Folge in $\mathcal{L}(E, G)$ ist. Es gibt daher ein $\delta > 0$, so daß

$$\forall u \in U_\delta(0)\, \forall n \in \mathbb{N}: \quad \|B(u, y_n)\|_G < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{4.2}$$

Zu δ gibt es wegen $x_n \to x$ für $n \to \infty$ ein $n_E \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \geq n_E: \quad \|x - x_n\|_E < \delta\,. \tag{4.3}$$

Mit Hilfe von (4.1), (4.2) und (4.3) folgt für alle $n \geq n_0 := \max\{n_E, n_F\}$:

$$\|B(x, y) - B(x_n, y_n)\|_G \leq \|B(x, y) - B(x, y_n)\|_G + \|B(x - x_n, y_n)\|_G < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Also ist B in allen $(x, y) \in E \times F$ stetig.

(d)$\Longrightarrow$(e): Sei nun (d) erfüllt. Dann gibt es zu $\varepsilon = 1$ ein $\delta > 0$ mit $\|B(x, y)\|_G < 1$ für alle $x \in E, y \in F$ mit $\|x\|_E \leq \delta, \|y\|_F \leq \delta$. Für alle $u \in B_E, v \in B_F$ folgt dann

$$\|B(u, v)\|_G = \delta^{-2}\|B(\delta u, \delta v)\|_G < \delta^{-2}.$$

Also gilt (e). □

Übungsaufgaben zu Kapitel 4.

4.1. Aufgabe. Wir betrachten eine Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ numerischer Quadraturformeln auf dem Intervall $[a, b]$,

$$S_n : C[a, b] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i^{(n)} f(x_i^{(n)}).$$

Hierbei seien die Stützstellen $x_0^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$ paarweise verschiedene Punkte im Intervall $[a, b]$ und $a_0^{(n)}, \ldots, a_n^{(n)} \in \mathbb{C}$. Beweisen Sie den folgenden *Satz von Szegö*:

Genau dann gilt für alle $f \in C[a, b]$

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f) = \int_a^b f(x)\, dx\,, \tag{4.4}$$

wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(a) Es gibt eine dichte Teilmenge P von $C[a, b]$, so daß (4.4) für alle $f \in P$ gilt.
(b) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i=0}^{n} |a_i^{(n)}| < \infty$.

Hinweis: Zeigen Sie, daß S_n stetig und linear ist und berechnen Sie $\|S_n\|$.

4.2. Aufgabe. Die Bezeichnungen seien wie in Aufgabe 4.1.

(a) Sei nun $a_i^{(n)} > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq i \leq n$. Beweisen Sie: Genau dann gilt (4.4) für alle $f \in C[a, b]$, wenn (4.4) für alle Polynome gilt.
(b) Bei der *summierten Trapezregel* verwendet man die Stützstellen $x_i^{(n)} := a + i\frac{b-a}{n}$, $i = 0, \ldots, n$ und

$$S_n(f) := \frac{b - a}{n}\left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i^{(n)})\right).$$

Zeigen Sie, daß (4.4) für alle $f \in C[a, b]$ erfüllt ist.

KAPITEL 5

Die Sätze von der offenen Abbildung und vom abgeschlossenen Graphen

5.1. Definition. Eine lineare Abbildung $T : E \to F$ zwischen zwei normierten $\mathbb{K}$-Vektorräumen E und F heißt *offen*, falls für jede in E offene Menge Ω auch die Bildmenge $T(\Omega)$ offen in F ist.

Für den Rest dieses Kapitels seien E und F stets zwei normierte $\mathbb{K}$-Vektorräume.

5.2. Lemma. *Für eine lineare Abbildung $T : E \to F$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *T ist offen.*
(b) *Für jede Nullumgebung U in E ist $T(U)$ eine Nullumgebung in F.*
(c) $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : U^F_\delta(0) \subseteq T(U^E_\varepsilon(0))$.
(d) $\forall n \in \mathbb{N} :\quad T(U^E_{2^{-n}}(0))$ *ist eine Nullumgebung in F.*

Beweis. Die Äquivalenz von (b) und (d) rechnet man leicht nach.

Ist (a) erfüllt und U eine beliebige Umgebung von 0, so ist $\mathrm{int}U$ offene Umgebung von 0 und daher nach Voraussetzung $T(\mathrm{int}U)$ offen. Wegen $0 = T(0) \in T(\mathrm{int}U) \subseteq T(U)$ ist $T(U)$ also eine Umgebung von 0 in F. Damit folgt (b).

Ist (b) erfüllt und $\varepsilon > 0$ beliebig, so ist nach Voraussetzung $T(U^E_\varepsilon(0))$ eine Umgebung von 0 in F. Es gibt also ein $\delta > 0$ mit $U^F_\delta \subseteq T(U^E_\varepsilon(0))$. Also ist (c) erfüllt.

Sei nun (c) erfüllt und $\Omega \subseteq E$ offen. Ist $T(x_0)$ ein beliebiger Punkt aus $T(\Omega)$, $x_0 \in \Omega$, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U^E_\varepsilon(x_0) \subseteq \Omega$. Es folgt $U^E_\varepsilon(0) = U^E_\varepsilon(x_0) - x_0 \subseteq \Omega - x_0$. Nach Voraussetzung (c) gibt es somit ein $\delta > 0$ mit $U^F_\delta(0) \subseteq T(U^E_\varepsilon(0))$ und wir erhalten

$$U^F_\delta(0) \subseteq T(U^E_\varepsilon(0)) \subseteq T(\Omega - x_0) = T(\Omega) - Tx_0$$

und daher $U^F_\delta(Tx_0) = Tx_0 + U^F_\delta(0) \subseteq T(\Omega)$. Also ist jeder Punkt Tx_0 aus Ω ein innerer Punkt von $T(\Omega)$. Die Bildmenge $T(\Omega)$ ist daher offen. □

5.3. Beispiel. Sei E ein normierter Raum und F ein abgeschlossenener Untervektorraum von E. Dann ist der kanonische Epimorphismus $\pi : E \to E/F$ stetig und offen.

Beweis. Die Stetigkeit von π wurde schon in Lemma 1.20 (c) gezeigt. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Für alle $x \in E$ mit $\|\pi(x)\|_{E/F} < \varepsilon$ gibt es nach Definition der Norm $\|\cdot\|_{E/F}$ ein $f \in F$ mit $\|x + f\|_E < \varepsilon$. Wegen $\pi(x + f) = \pi(x)$ für alle $f \in F$ folgt $\pi(U^E_\varepsilon(0)) \supseteq U^{E/F}_\varepsilon(\pi(0))$. Nach Lemma 5.2 ist π also eine offene Abbildung. □

5.4. Lemma. *Seien $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ zwei normierte $\mathbb{K}$–Vektorräume. Ist $T : E \to F$ linear und offen, so ist T schon surjektiv.*

Beweis. Da E offene Teilmenge von $(E, \|\cdot\|_E)$ und T eine offene, lineare Abbildung ist, ist $T(E)$ offener Untervektorraum von $(F, \|\cdot\|_F)$. Nach Lemma 3.10 folgt $T(E) = F$. □

5.5. Satz von der offenen Abbildung. *Seien $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ zwei normierte $\mathbb{K}$–Vektorräume, E sei vollständig. Ist $A \in \mathcal{L}(E, F)$ und $A(E)$ von zweiter Kategorie in $(F, \|\cdot\|_F)$, so gilt:*

(a) *$A(E) = F$, d.h. A ist surjektiv.*

(b) *A ist eine offene Abbildung.*

BEWEIS. Nach Lemma 5.4 genügt es (b) zu beweisen. Wegen Lemma 5.2 genügt es hierfür zu zeigen, daß $A(U^E_{2^{-n}}(0))$ eine Nullumgebung in F ist. Wir zeigen zunächst:

(i) *Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\overline{A(U^E_{2^{-n}}(0))}$ eine Nullumgebung in F.*

Sei also $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Ist $x \in E$ beliebig, so gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{k}\|x\|_E < 2^{-n-1}$ also mit $x \in kU^E_{2^{-n-1}}(0)$. Es folgt

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} kU^E_{2^{-n-1}}(0)$$

also auch

$$A(E) \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} k\overline{A(U^E_{2^{-n-1}}(0))}.$$

Da $A(E)$ von zweiter Kategorie in F ist, gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$\operatorname{int}\left(k\overline{A(U^E_{2^{-n-1}}(0))}\right) \neq \emptyset.$$

Da die Multiplikation mit k eine Homöomorphie von F auf sich ist, folgt auch

$$\operatorname{int}\overline{A(U^E_{2^{-n-1}}(0))} \neq \emptyset.$$

Ist $y \in \operatorname{int}\overline{A(U^E_{2^{-n-1}}(0))}$ beliebig, so ist also $\operatorname{int}\overline{A(U^E_{2^{-n-1}}(0))} - y$ eine Nullumgebung in F. Wegen

$$\begin{aligned}\operatorname{int}\overline{A(U^E_{2^{-n-1}}(0))} - y &\subseteq \operatorname{int}\overline{A(U^E_{2^{-n-1}}(0))} + \operatorname{int}\overline{A(U^E_{2^{-n-1}}(0))} \subseteq \overline{A(U^E_{2^{-n-1}}(0)) + A(U^E_{2^{-n-1}}(0))}\\ &\subseteq \overline{A(U^E_{2^{-n-1}}(0) + U^E_{2^{-n-1}}(0))} \subseteq \overline{A(U^E_{2^{-n}}(0))}\end{aligned}$$

ist auch $\overline{A(U^E_{2^{-n}}(0))}$ eine Nullumgebung in F.

(ii) *Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\overline{A(U^E_{2^{-n-2}}(0))} \subseteq A(U^E_{2^{-n}}(0))$.* Insbesondere ist also $A(U^E_{2^{-n}}(0))$ eine Nullumgebung in F.

Sei $y \in \overline{A(U^E_{2^{-n-2}}(0))}$ beliebig. Wir konstruieren induktiv zwei Folgen $(x_k)_{k=0}^{\infty}$ und $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ in E bzw. F, so daß für alle $l \in \mathbb{N}$ die folgende Bedingung (E_l) erfüllt ist:

$$(\mathrm{E}_l) \qquad \begin{aligned}&\|x_{k-1}\|_E \leq 2^{-k-n-1}, \quad y_k \in \overline{A(U^E_{2^{-n-1-k}}(0))} \quad \text{für } 1 \leq k \leq l\\ &Ax_k = y_k - y_{k+1} \quad \text{für } 1 \leq k \leq l-1\end{aligned}$$

Mit $y_1 = y$ und $x_0 = 0$ ist offensichtlich (E_1) erfüllt.

Seien nun schon $x_0, \ldots, x_{l-1} \in E$ und $y_1, \ldots, y_l \in F$ so konstruiert, daß (E_l) erfüllt ist. Wir konstruieren x_l und y_{l+1}: Wegen (i) ist $y_l - \overline{A(U^E_{2^{-n-1-(l+1)}}(0))}$ eine Umgebung von $y_l \in \overline{A(U^E_{2^{-n-1-l}}(0))}$. Es gibt also ein $x_l \in U^E_{2^{-n-1-l}}(0)$ mit $y_l - Ax_l \in \overline{A(U^E_{2^{-n-1-(l+1)}}(0))}$ und daher ein $y_{l+1} \in \overline{A(U^E_{2^{-n-1-(l+1)}}(0))}$ mit $y_l - y_{l+1} = Ax_l$. Damit ist dann (E_{l+1}) erfüllt und die induktive Konstruktion vollendet.

Mit $s_k := \sum_{l=1}^k x_l$ gilt für alle $p \in \mathbb{N}$:

$$\|s_k - s_{k+p}\|_E = \left\| \sum_{j=1}^{p} x_{k+j} \right\|_E \leq \sum_{j=1}^{p} \|x_{k+j}\|_E \leq \sum_{j=1}^{p} 2^{-n-k-j-1} < 2^{-n-k-1} \to 0 \text{ für } k \to \infty\,.$$

$(s_k)_{k=1}^{\infty}$ ist also eine Cauchyfolge in E und damit wegen der Vollständigkeit von E konvergent gegen ein $x \in E$. Wegen

$$\|s_k\|_E \leq \sum_{l=1}^{k} \|x_l\|_E \leq \sum_{l=1}^{k} 2^{-n-l-1} < 2^{-n-1}$$

folgt $\|x\|_E \leq 2^{-n-1}$, also $x \in \overline{U^E_{2^{-n-1}}(0)} \subset U^E_{2^{-n}}(0)$.

Wir zeigen nun noch, daß $Ax = y$ gilt. Hierzu beachten wir unter Verwendung von (E_l) und $y_1 = y$:

$$As_k = \sum_{l=1}^{k} Ax_l = \sum_{l=1}^{k} (y_l - y_{l+1}) = y - y_{k+1}\,.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Da A stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit $A(U^E_\delta(0)) \subseteq U^F_{\varepsilon/2}(0)$. Wählen wir $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $2^{-n-2-k_0} < \delta$, so folgt für alle $k \geq k_0$:

$$y_{k+1} \in \overline{A(U^E_{2^{-n-2-k}}(0))} \subseteq \overline{A(U^E_\delta(0))} \subseteq \overline{U^F_{\varepsilon/2}(0)} \subset U^F_\varepsilon(0).$$

und damit $\|y - As_k\|_F = \|y_{k+1}\|_F < \varepsilon$. Also gilt $y_k \to 0$ in F für $k \to \infty$. Wegen der Stetigkeit von A folgt

$$Ax = \lim_{k\to\infty} As_k = \lim_{k\to\infty} (y - y_{k+1}) = y.$$

Damit ist die Behauptung (b) bewiesen. □

5.6. Folgerung. *Seien E und F zwei Banachräume. Für eine stetige lineare Abbildung $A : E \to F$ sind äquivalent:*

(a) *A ist eine offene Abbildung.*
(b) *A ist surjektiv.*
(c) *$A(E)$ ist von zweiter Kategorie in F.*

Beweis. Nach Lemma 5.4 folgt (b) aus (a) und nach dem Kategoriensatz von Baire ist (c) eine Konsequenz von (b). Ist (c) erfüllt, so gilt (a) nach dem Satz von der offenen Abbildung. □

5.7. Satz von der inversenen Abbildung. *Seien E, F zwei Banachräume. Ist $A \in \mathcal{L}(E, F)$ bijektiv, so ist $A^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$, d.h. A ist ein topologischer Isomorphismus.*

Beweis. Sei $\Omega \subset E$ eine beliebige offene Menge. Nach Folgerung 5.6 ist dann die Menge $(A^{-1})^{-1}(\Omega) = A(\Omega)$ offen in F. Also ist A^{-1} stetig. □

Bisher haben wir nur lineare Abbildungen betrachtet, die auf dem ganzen Ausgangsraum definiert waren. Wir wollen den Begriff der linearen Abbildung jetzt etwas allgemeiner fassen und auch lineare Abbildungen zulassen, die nur auf einem Untervektorraum definiert sind.

5.8. Definition. Seien E, F zwei $\mathbb{K}$–Vektorräume. Ein *linearer Operator* T von E nach F ist eine auf einem Untervektorraum $D(T)$ definierte lineare Abbildung mit Werten in F. Wir schreiben $T : E \supseteq D(T) \to F$. Wir nennen $D(T)$ den *Definitionsbereich* von T und definieren

- den *Kern* von T durch $\ker T := N(T) := \{x \in D(T); Tx = 0\}$,
- das *Bild* T durch $\operatorname{ran} T := R(T) := \{Tx; x \in D(T)\}$ und
- den *Graphen* von T durch $G(T) := \{(x, Tx); x \in D(T)\}$.

Zwei lineare Operatoren T und S heißen *gleich*, $S = T$, genau dann, wenn $D(T) = D(S)$ und $Tx = Sx$ für alle $x \in D(T) = D(S)$ gilt. T heißt eine *Erweiterung* von S und S eine Einschränkung von T, falls gilt $D(T) \supseteq D(S)$ und $Tx = Sx$ für alle $x \in D(S)$. Wir schreiben dann auch $S \subseteq T$. Offensichtlich gilt

$$S \subseteq T \iff G(S) \subseteq G(T) \quad \text{und} \quad S = T \iff G(S) = G(T).$$

5.9. DEFINITION. Seien $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ zwei normierte Räume. Ein linearer Operator $T : E \supseteq D(T) \to F$ heißt *abgeschlossenen*, falls sein Graph $G(T)$ in $E \times F$ abgeschlossen ist. Hierbei versehen wir $E \times F$ mit der durch $\|(e, f)\|_{E\times F} := \|e\|_E + \|f\|_F$ für alle $(e, f) \in E \times F$ definierten Norm. Die durch

$$\|x\|_T := \|x\|_E + \|Tx\|_F \quad \text{für alle } x \in D(T)$$

definierte Norm heißt die *Graphennorm* für T. Durch $x \mapsto (x, Tx)$ ist dann ein isometrischer Isomorphismus von $(D(T), \|\cdot\|_T)$ auf $(G(T), \|\cdot\|_{E\times F}|_{G(T)})$ gegeben.

Die Einführung der Graphennorm hat den Vorteil, daß $T : (D(T), \|\cdot\|_T) \to F$ stetig ist, wenn wir den Definitionsbereich mit der Graphennorm versehen.

Sind $E = \mathcal{H}$ und $F = \mathcal{K}$ Prä-Hilberträume, so werden $\mathcal{H} \times \mathcal{K}$ und $D(T)$ wieder zu Prä-Hilberträumen vermöge der durch

$$\langle (x, y), (u, v)\rangle := \langle x, u\rangle_{\mathcal{H}} + \langle y, v\rangle_{\mathcal{K}} \qquad \text{für alle } x, u \in \mathcal{H},\ y, v \in \mathcal{K}$$

und

$$\langle x, u\rangle_T := \langle x, u\rangle_{\mathcal{H}} + \langle Tx, Tu\rangle_{\mathcal{K}} \qquad \text{für alle } x, u \in D(T)$$

definierten Skalarprodukte. Die hier durch definierten Normen sind (wie man leicht verifiziert) äquivalent zu den oben definierten Normen $\|\cdot\|_{\mathcal{H}\times\mathcal{K}}$ bzw. $\|\cdot\|_T$.

5.10. LEMMA. *Seien $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ zwei Banachräume. Für einen linearen Operator $T : E \supseteq D(T) \to F$ gilt: T ist genau dann abgeschlossen, wenn $(D(T), \|\cdot\|_T)$ vollständig ist.*

BEWEIS. Da die Abbildung $x \mapsto (x, Tx)$ eine lineare Isometrie von $(D(T), \|\cdot\|_T)$ auf $G(T)$ versehen mit der durch $\|\cdot\|_{E\times F}$ induzierten Norm ist und $(E\times F, \|\cdot\|_{E\times F})$ vollständig ist, ist $(D(T), \|\cdot\|_T)$ genau dann vollständig, wenn $G(T)$ vollständig ist und dies ist genau dann der Fall, wenn $G(T)$ abgeschlossener Untervektorraum von $(E \times F, \|\cdot\|_{E\times F})$ ist. $\square$

5.11. DEFINITION. Seien $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ zwei normierte Räume. Ein linearer Operator $T : E \supseteq D(T) \to F$ heißt *abschließbar*, falls es einen abgeschlossenen Operator $S : E \supseteq D(S) \to F$ mit $T \subseteq S$ gibt.

Für einen linearen Operator $T : E \supseteq D(T) \to F$ heißt

$$\mathfrak{S}(T) := \left\{ y \in F\,;\ \begin{array}{l} \text{Es gibt eine Folge } (x_n)_{n=1}^{\infty} \text{ in } D(T) \\ \text{mit } \|x_n\|_E \to 0 \text{ und } Tx_n \to y \text{ in } F \text{ für } n \to \infty \end{array} \right\}$$

der *separierende Raum* zu T.

5.12. LEMMA. *Seien $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ zwei normierte Räume und sei $T : E \supseteq D(T) \to F$ ein linearer Operator.*

(a) *Für T sind äquivalent:*
  (i) *T ist abschließbar.*
  (ii) $\mathfrak{S}(T) = \{0\}$.
  (iii) $\overline{G(T)} \cap (\{0\} \times F) = \{(0, 0)\}$.

(b) *Ist T abschließbar, so gibt es genau eine minimale abgeschlossene Erweiterung $\overline{T}$ von T. Es ist $G(\overline{T}) = \overline{G(T)}$. $\overline{T}$ heißt die Abschließung von T.*

BEWEIS. (a) (i) $\Longrightarrow$ (ii): Ist T abschließbar, so existiert ein abgeschlossener Operator $S \supseteq T$. Sei nun $y \in \mathfrak{S}(T)$ beliebig. Dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ in $D(T) \subseteq D(S)$ mit $\|x_n\|_E \to 0$ und $Sx_n = Tx_n \to y$ in F für $n \to \infty$. Es folgt $(0, y) \in \overline{G(S)} = G(S)$ und damit $S(0) = y$. Da S linear ist, ist dies nur möglich, wenn $y = 0$ gilt. Also folgt $\mathfrak{S}(T) = \{0\}$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Für alle $y \in F$ mit $(0, y) \in \overline{G(T)}$ gibt es eine Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ in $D(T)$ mit $x_n \to 0$ in E und $Tx_n \to y$ in F. Es folgt $y \in \mathfrak{S}(T)$. Ist also $\mathfrak{S}(T) = \{0\}$, so muß (iii) gelten.

(iii) $\Longrightarrow$ (i): Sei nun (iii) erfüllt. Wir definieren

$$D(\overline{T}) := \{x \in E\,;\, \exists y \in F :\ (x, y) \in \overline{G(T)}\}\,.$$

Für alle $x \in D(\overline{T})$ gibt es wegen der Voraussetzung (iii) genau ein $\overline{T}(x) := y \in F$ mit $(x, \overline{T}(x)) \in \overline{G(T)}$. Man rechnet nach, daß die hierdurch definierte Abbildung $\overline{T} : E \supseteq D(\overline{T}) \to F$ ein linearer Operator ist. Aus der Definition von $\overline{T}$ folgt $G(\overline{T}) = \overline{G(T)}$. Also ist $\overline{T}$ eine abgeschlossene Erweiterung von T.

(b) Ist T abschließbar, so gilt (iii) nach (a) und aus dem Beweis zu (iii) $\Longrightarrow$ (i) folgt die Existenz einer abgeschlossenen Erweiterung $\overline{T}$ mit $G(\overline{T}) = \overline{G(T)}$. Sei nun $S \supseteq T$ eine beliebige abgeschlossene Erweiterung von T. Dann ist $G(T) \subseteq G(S)$ und daher auch $G(\overline{T}) = \overline{G(T)} \subseteq \overline{G(S)} = G(S)$. Also gilt $\overline{T} \subseteq S$ und es folgt, daß $\overline{T}$ die eindeutig bestimmte minimale abgeschlossene Erweiterung von T ist. □

Seien nun $A_j : E \supseteq D(A_j) \to F$, $j = 1, 2, 3$, $S : F \supseteq D(S) \to G$ und $T : H \supseteq D(T) \to E$ lineare Operatoren und $\lambda \in \mathbb{K}$. Wir definieren lineare Operatoren $A_1 + A_2$, SA_1 und λA_1 durch

$$\begin{aligned} D(A_1 + A_2) :=& D(A_1) \cap D(A_2) \text{ und } (A_1 + A_2)x := A_1x + A_2x \text{ für alle } x \in D(A_1 + A_2),\\ D(SA_1) :=& \{x \in D(A_1)\,;\, A_1x \in D(S)\} \text{ und } (SA_1)x := S(A_1x) \text{ für alle } x \in D(SA_1),\\ D(\lambda A_1) :=& D(A_1) \text{ und } (\lambda A_1)x := \lambda(A_1x) \text{ für alle } x \in D(\lambda A_1). \end{aligned}$$

Für die so eingeführten Rechenoperationen rechnet man leicht nach, daß die Assoziativgesetze

$$\begin{aligned} (A_1 + A_2) + A_3 =& A_1 + (A_2 + A_3)\\ (SA_1)T =& S(A_1T) \end{aligned}$$

und das erste Distributivgesetz

$$(A_1 + A_2)T = (A_1T) + (A_2T)$$

gelten. Für das zweite Distributivgesetz gilt im Allgemeinen nur die abgeschwächte Form

$$S(A_1 + A_2) \supseteq (SA_1) + (SA_2)\,.$$

Daß das Gleichheitszeichen beim zweiten Distributivgesetz im Allgemeinen nicht gilt, zeigt schon das folgende einfache

Beispiel. Sei $E \neq \{0\}$ und sei $A_1 := \mathrm{id}_E$, $A_2 := -\mathrm{id}_E$ mit $D(A_1) := D(A_2) := E$ und sei $S : E \supseteq D(S) \to E$ definiert durch $D(S) := \{0\}$ und $S(0) := 0$. Dann gilt $D(A_1 + A_2) = E$ und $(A_1 + A_2)x = 0 \in D(S)$ für alle $x \in E$ sowie $D((SA_1) + (SA_2)) = D(SA_1) \cap D(SA_2) = \{0\}$.

Ist $A : E \supseteq D(A) \to F$ ein injektiver Operator, so definieren wir $A^{-1} : F \supseteq D(A^{-1}) \to E$ durch $D(A^{-1}) := \mathrm{ran}A$ und $A^{-1}y := x$ für $y = A(x) \in \mathrm{ran}A = D(A^{-1})$. Dann ist auch A^{-1} ein injektiver Operator und es gilt $\mathrm{ran}A^{-1} = D(A)$.

5.13. Lemma. *Seien $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ zwei normierte Räume und sei $T : E \supseteq D(T) \to F$ ein injektiver linearer Operator. Genau dann ist T abgeschlossen, wenn T^{-1} abgeschlossen ist.*

Beweis. Es ist $G(T^{-1}) = \{(Tx, x)\,;\, x \in D(T)\}$. Die Abbildung

$$\Psi : E \times F \to F \times E \text{ mit } \Psi(x, y) := (y, x) \text{ für alle } (x, y) \in E \times F$$

ist linear und wegen $\|\Psi(x,y)\|_{F\times E} = \|y\|_F + \|x\|_E = \|(x,y)\|_{E\times F}$ für alle $(x,y) \in E \times F$ ein isometrischer Isomorphismus mit $\Psi(G(T)) = G(T^{-1})$. Der Graph von T ist also genau dann abgeschlossen in $E \times F$, wenn $G(T^{-1})$ in $F \times E$ abgeschlossen ist. □

5.14. Lemma. *Seien $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ und $(G, \|\cdot\|_G)$ normierte Räume, sei $T \in \mathcal{L}(E,F)$ und sei $S : F \supseteq D(S) \to G$ ein abgeschlossener Operator. Dann gilt:*

(a) *T ist ein abgeschlossener linearer Operator und auf $D(T) = E$ sind die Graphennorm $\|\cdot\|_T$ und die Ausgangsnorm $\|\cdot\|_E$ äquivalent.*
(b) *ST ist ein abgeschlossener Operator.*

Beweis. (a) Sei $((x_n, Tx_n))_{n=1}^\infty$ eine beliebige Folge aus $G(T)$ mit $(x_n, Tx_n) \to (x,y)$ in $E \times F$ für $n \to \infty$. Insbesondere gilt dann $x_n \to x$ in E und $Tx_n \to y$ in F für $n \to \infty$. Wegen der Stetigkeit von T folgt auch $Tx_n \to Tx$ in F für $n \to \infty$. Also ist $y = Tx$ und $(x,y) = (x,Tx) \in G(T)$. Für alle $x \in E$ gilt ferner

$$\|x\|_E \le \|x\|_T = \|x\|_E + \|Tx\|_F \le \|x\|_E + \|T\|\|x\|_E = (1 + \|T\|)\|x\|_E\,,$$

d.h. die Normen $\|\cdot\|_E$ und $\|\cdot\|_T$ sind äquivalent.

(b) Sei $((x_n, (ST)x_n))_{n=1}^\infty$ eine beliebige Folge aus $G(ST)$ mit $(x_n, STx_n) \to (x,y)$ in $E\times G$ für $n \to \infty$. Insbesondere hat man $x_n \to x$ in E und wegen der Stetigkeit von T auch $Tx_n \to Tx$ in F für $n \to \infty$. Wegen $x_n \in D(ST)$ ist $Tx_n \in D(S)$ und $(ST)x_n = S(Tx_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge $((Tx_n, (ST)x_n))_{n=1}^\infty$ ist also eine Folge aus $G(S)$, welche in $F \times G$ gegen (Tx, y) konvergiert. Da S ein abgeschlossener Operator ist, folgt $Tx \in D(S)$ und $S(Tx) = y$. Also ist $x \in D(ST)$ und $(ST)x = y$, d.h. $(x,y) \in G(ST)$, d.h. $G(ST)$ ist abgeschlossen. □

Bemerkung. In den Übungen wird gezeigt, daß es stetige lineare Operatoren S und abgeschlossene lineare Operatoren T gibt für die ST *nicht* abgeschlossen ist.

5.15. Lemma. *Seien $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ zwei normierte Räume und $S \in \mathcal{L}(E,F)$. Ist $T : E \supseteq D(T) \to F$ ein linearer Operator, so gilt:*

(a) *$S + T$ ist abgeschlossen genau dann, wenn T abgeschlossen ist.*
(b) *$S+T$ ist abschließbar genau dann, wenn T abgeschließbar ist. Es ist dann $\overline{S+T} = S + \overline{T}$.*

Beweis. (a) "$\Longrightarrow$" Sei also $S + T$ abgeschlossen und sei $(x,y) \in \overline{G(T)}$ beliebig vorgegeben. Dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n=1}^\infty$ in $D(T)$ mit $(x_n, Tx_n) \to (x,y)$ in $E \times F$ für $n \to \infty$. Insbesondere folgt $x_n \to x$ in E und wegen der Stetigkeit von S auch $Sx_n \to Sx$ in F für $n \to \infty$. Also gilt

$$(x_n, (S+T)x_n) = (x_n, Sx_n + Tx_n) \to (x, Sx + y) \qquad \text{für } n \to \infty\,.$$

Da $S + T$ abgeschlossen ist, folgt $x \in D(S+T) = D(S) \cap D(T) = D(T)$ und $Sx + Tx = (S+T)x = Sx+y$ also auch $Tx = y$. Es ist also $(x,y) \in G(T)$. $G(T)$ ist also abgeschlossen in $E \times F$.

"$\Longleftarrow$" Sei nun T ein abgeschlossener Operator. Wegen $-S \in \mathcal{L}(E,F)$ und $T = -S + (T+S)$ folgt aus der bereits gezeigten Beweisrichtung "$\Longrightarrow$", daß auch $S+T$ abgeschlossen ist.

(b) als Übungsaufgabe. □

5.16. Satz vom abgeschlossenen Graphen. *Seien $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ zwei Banachräume. Für einen linearen Operator $T : E \supseteq D(T) \to F$ sind die folgenden drei Aussagen äquivalent:*

(a) *T ist abgeschlossen und $D(T)$ ist in $(E, \|\cdot\|_E)$ abgeschlossen.*
(b) *$T : (D(T), \|\cdot\|_E|_{D(T)}) \to (F, \|\cdot\|_F)$ ist stetig und $D(T)$ ist in $(E, \|\cdot\|_E)$ abgeschossen.*

(c) $T : (D(T), \|\cdot\|_E|_{D(T)}) \to (F, \|\cdot\|_F)$ *ist stetig und* $G(T)$ *ist in* $(E \times F, \|\cdot\|_{E\times F})$ *abgeschossen.*

Beweis. "(a)$\Longrightarrow$(b)": Sei also (a) erfüllt. Da T abgeschlossenen ist und $D(T)$ in E abgeschlossen ist, ist (wegen der Vollständigkeit von E) auch $(D(T), \|\cdot\|_E|_{D(T)})$ ein Banachraum. Da $G(T)$ in dem Banachraum $(E\times F, \|\cdot\|_{E\times F})$ abgeschlossen ist, ist auch $G(T)$ bezüglich der durch $\|\cdot\|_{E\times F}$ induzierten Norm ein Banachraum. Dieser ist isometrisch isomorph zu $(D(T), \|\cdot\|_T)$. Also ist auch $(D(T), \|\cdot\|_T)$ ein Banachraum. Die Identität

$$id : (D(T), \|\cdot\|_T) \to (D(T), \|\cdot\|_E|_{D(T)})$$

ist wegen $\|x\|_E \leq \|x\|_E + \|Tx\|_F = \|x\|_T$ offensichtlich stetig und bijektiv. Nach dem Satz von der inversen Abbildung ist also auch

$$id : (D(T), \|\cdot\|_E|_{D(T)}) \to (D(T), \|\cdot\|_T)$$

stetig. Es gibt also eine Konstante $C > 0$ mit $\|x\|_E + \|Tx\|_F = \|x\|_T \leq C\|x\|_E$ für alle $x \in D(T)$. Es folgt

$$\sup_{x\in D(T), \|x\|_E\leq 1} \|Tx\|_F \leq C < \infty$$

und damit die Stetigkeit von $T : (D(T), \|\cdot\|_E|_{D(T)}) \to (F, \|\cdot\|_F)$. Also gilt (b).

"(b)$\Longrightarrow$(c)": Sei nun (b) erfüllt. Da $D(T)$ in E abgeschlossen ist, ist $(D(T), \|\cdot\|_E|_{D(T)})$ ein Banachraum. Wegen der Stetigkeit von $T : (D(T), \|\cdot\|_E|_{D(T)}) \to (F, \|\cdot\|_F)$ ist nach Lemma 5.14 der Graph $G(T)$ ein abgeschlossener Unterraum von $D(T) \times F$ versehen mit der von $\|\cdot\|_{E\times F}$ induzierten Norm also auch von $(E \times F, \|\cdot\|_{E\times F})$. Also gilt (c).

"(c)$\Longrightarrow$(a)": Aus (c) folgt wegen der Stetigkeit von $T : (D(T), \|\cdot\|_E|_{D(T)}) \to (F, \|\cdot\|_F)$, daß für alle $x \in D(T)$ gilt

$$\|x\|_E \leq \|x\|_T = \|x\|_E + \|Tx\|_F \leq \|x\|_E + \|T\|\|x\|_E\,.$$

Die Normen $\|\cdot\|_E$ und $\|\cdot\|_T$ sind daher auf $D(T)$ äquivalent. Da $(D(T), \|\cdot\|_T)$ isometrisch isomorph zu dem abgeschlossenen Unterraum $G(T)$ des Banachraums $(E\times F, \|\cdot\|_{E\times F})$ und daher vollständig ist, ist auch $(D(T), \|\cdot\|_E|_{D(T)})$ vollständig und damit ein abgeschlossener Unterraum von $(E, \|\cdot\|_E)$. Also gilt (a). □

5.17. Folgerung. *Seien* E_1, E_2 *zwei normierte* $\mathbb{K}$*–Vektorräume und seien* F_1, F_2 *zwei Banachräume. Seien weiter* $J_j \in \mathcal{L}(F_j, E_j)$, $j = 1, 2$ *und* $T \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ *gegeben. Ist* J_2 *injektiv und ist* $S : F_1 \to F_2$ *linear mit* $J_2S = TJ_1$, *so ist auch* S *stetig.*

Beweis. Nach dem Satz 5.16 vom abgeschlossenen Graphen genügt es zu zeigen, daß $G(S)$ abgeschlossen ist in $E_1 \times E_2$. Sei also $(x, y) \in \overline{G(S)}$ beliebig vorgegeben. dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ in F_1 mit $x_n \to x$ in F_1 und $Sx_n \to y$ in F_2 für $n \to \infty$. Wegen der Stetigkeit von J_1, J_2 und T und der Vertauschungsbedingung folgt $J_2Sx_n \to J_2y$ und $J_2Sx_n = TJ_1x_n \to TJ_1x = J_2Sx$ in E_2 für $n \to \infty$. Also muß $J_2y = J_2Sx$ gelten. Da J_2 injektiv ist, folgt $Sx = y$ und daher $(x, y) = (x, Sx) \in G(S)$. Damit ist gezeigt, daß $G(S)$ abgeschlossen ist. □

Übungsaufgaben zu Kapitel 5.

5.1. Aufgabe. Seien E und F zwei Banachräume und sei $T : E \to F$ ein stetiger linearer Operator, so daß $\dim F/T(E) =: N < \infty$ gilt, d.h. so daß das Bild von T von endlicher Kodimension in F ist. Zeigen Sie, daß in diesem Fall das Bild von T abgeschlossen ist.

Hinweis: Man beachte, daß $T(E)$ einen *algebraischen* Komplementärraum der Dimension N besitzt.

5.2. Aufgabe. Seien X_0 und X_1 Untervektorräume eines normierten Raumes $(Y, \|\cdot\|)$, auf denen Normen $\|\cdot\|_0$ bzw. $\|\cdot\|_1$ gegeben seien, so daß $(X_0, \|\cdot\|_0)$ und $(X_1, \|\cdot\|_1)$ Banachräume sind und die kanonischen Einbettungsabbildungen

$$(X_j, \|\cdot\|_j) \hookrightarrow (Y, \|\cdot\|), \quad x \mapsto x$$

stetig sind $(j = 0, 1)$. Zeigen Sie:

(a) Ist $T : (Y, \|\cdot\|) \to (Y, \|\cdot\|)$ eine stetige lineare Abbildung mit $TX_0 \subset X_0$, so ist auch die Abbildung $T|_{X_0} : (X_0, \|\cdot\|_0) \to (X_0, \|\cdot\|_0)$ stetig.

(b) Die Untervektorräume $X_\Delta := X_0 \cap X_1$ und

$$X_\Sigma := X_0 + X_1 = \{x_0 + x_1 \,:\, x_0 \in X_0, x_1 \in X_1\}$$

werden, versehen mit den durch

$$\|x\|_\Delta := \max_{j=0,1} \|x\|_j \quad \text{und} \quad \|x\|_\Sigma := \inf\{\|x_0\|_0 + \|x_1\|_1 \,:\, x = x_0 + x_1\}$$

definierten Normen zu Banachräumen.

5.3. Aufgabe. Führen Sie den Beweis zu Lemma 5.15 (b) aus.

5.4. Aufgabe. Geben Sie ein Beispiel eines stetigen linearen Operators S und eines abgeschlossenen linearen Operators T, so daß ST nicht abgeschlossen ist.

KAPITEL 6

Der Satz von Hahn–Banach

6.1. Definition. Sei E ein $\mathbb{R}$–Vektorraum. Eine Abbildung $p : E \to \mathbb{R}$ heißt *sublineares Funktional*, falls die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind.

(a) $\forall x \in E\, \forall 0 < \lambda \in \mathbb{R} : \quad p(\lambda x) = \lambda p(x)$.
(b) $\forall x, y \in E : \quad p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.

Insbesondere sind also alle reellwertigen $\mathbb{R}$-linearen Funktionale und alle Halbnormen sublineare Funktionale.

6.2. Lemma. *Sei E ein $\mathbb{R}$–Vektorraum und $p : E \to \mathbb{R}$ ein sublineares Funktional auf E. Sei F ein Untervektorraum, $x_0 \in E \setminus F$ und $f : F \to \mathbb{R}$ linear mit $f(x) \leq p(x)$ für alle $x \in F$, so gibt es ein lineares Funktional $f_0 : F_0 := \mathrm{LH}(\{x_0\} \cup F) \to \mathbb{R}$ mit*

$$f_0 \leq p \text{ auf } F_0 \quad \text{ und } \quad f_0|_F \equiv f\,.$$

Beweis. Für alle $x, y \in F$ gilt:

$$f(x) - f(y) = f(x - y) \leq p(x - y) \leq p(x + x_0) + p(-x_0 - y)$$

und daher

$$-p(-x_0 - y) - f(y) \leq p(x + x_0) - f(x)\,.$$

Hieraus folgt

$$\sup_{y \in F} -p(-x_0 - y) - f(y) \leq \inf_{x \in F} p(x + x_0) - f(x)\,.$$

Insbesondere existiert also ein $\gamma \in \mathbb{R}$ mit

$$\forall x, y \in F : \quad -p(-x_0 - y) - f(y) \leq \gamma \leq p(x + x_0) - f(x)\,. \tag{6.1}$$

Wir definieren nun $f_0 : F_0 \to \mathbb{R}$ durch $f_0(x + \lambda x_0) := f(x) + \lambda\gamma$ für alle $x \in F, \lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist f_0 offensichtlich linear und erfüllt $f_0|_F \equiv f$.

Wir zeigen noch $f_0 \leq p$ auf F_0. Sei also $u = x + \lambda x_0 \in F_0$ beliebig, $x \in F$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Ist $\lambda = 0$, so ist $u = x \in F$ und daher nach Voraussetzung $f_0(u) = f(u) \leq p(u)$. Ist $\lambda > 0$, so ersetzen wir in (6.1) x durch $\frac{1}{\lambda}x$ und erhalten aus der rechten Ungleichung

$$\gamma \leq p(\frac{1}{\lambda}x + x_0) - f(\frac{1}{\lambda}x),$$

woraus nach Multiplikation mit λ wegen der positiven Homogenität von p und f folgt:

$$f_0(\lambda x_0) = \lambda\gamma \leq p(x + \lambda x_0) - f(x) = p(u) - f(x)$$

folgt. Hieraus erhält man durch Addition von $f(x)$ wegen der Linearität von f

$$f_0(u) = f(x) + \lambda\gamma \leq p(u)\,.$$

Im verbleibenden Fall $\lambda < 0$ ersetzen wir in (6.1) in der linken Ungleichung y durch $\frac{1}{\lambda}x$ und erhalten

$$-p(-x_0 - \frac{1}{\lambda}x) - f(\frac{1}{\lambda}x) \leq \gamma.$$

Durch Multiplikation mit λ folgt wegen der positiven Homogenität von p und der Linearität von f,

$$f_0(\lambda x_0) = \lambda\gamma \le (-\lambda)p(-\frac{1}{\lambda}x - x_0) - f(x) \le p(u) - f(x)\,.$$

Hieraus folgt wie im vorhergehenden Fall $f_0(u) = f(x) + \lambda\gamma \le p(u)$. Damit ist gezeigt, daß $f_0(u) \le p(u)$ für alle $u \in F_0$ erfüllt ist. □

6.3. Satz von Hahn (1927) und Banach (1929). *Sei E ein $\mathbb{R}$–Vektorraum, $p : E \to \mathbb{R}$ ein sublineares Funktional auf E und F ein Untervektorraum von E. Ist $f : F \to \mathbb{R}$ linear mit $f \le p$ auf F, so gibt es ein lineares Funktional $f_* : E \to \mathbb{R}$ mit*

$$f_*|_F \equiv f \quad \textit{und} \quad f_* \le p \;\textit{auf}\; E. \tag{6.2}$$

Beweis. Sei

$$\mathcal{F} := \left\{ (G, f_G);\; \begin{array}{l} G \text{ ist Untervektorraum von } E \text{ mit } F \subseteq G, \\ f_G : G \to \mathbb{R} \text{ ist linear mit } f_G|_F \equiv f \text{ und } f_G \le p \text{ auf } G \end{array} \right\}.$$

Wegen $(F, f) \in \mathcal{F}$ ist $\mathcal{F} \ne \emptyset$. Auf $\mathcal{F}$ ist eine teilweise Ordnung gegeben durch

$$(G, f_G) \le (H, f_H) :\Longleftrightarrow G \subseteq H \text{ und } f_G \equiv f_H|_G\,.$$

Sei nun $\mathcal{K}$ eine linear geordnete Teilmenge von $\mathcal{F}$. Wir setzen

$$G_0 := \bigcup_{(G,f_G)\in\mathcal{K}} G \quad \text{und für } u \in G_0 : \quad f_{G_0}(u) := f_G(u) \text{ falls } u \in G \text{ und } (G, f_G) \in \mathcal{K}\,.$$

Da $\mathcal{K}$ linear geordnet ist, ist G_0 ein Untervektorraum und f_{G_0} wohldefiniert. Man rechnet weiter nach, daß f_{G_0} linear ist und $f_{G_0}|G \equiv f_G$ für alle $(G, f_G) \in \mathcal{K}$ gilt. Wegen $f_G \le p$ auf G für alle $(G, f_G) \in \mathcal{F}$ gilt auch $f_{G_0} \le p$ auf G_0. Damit ist gezeigt: Jede linear geordnete Teilmenge $\mathcal{K}$ von $\mathcal{F}$ besitzt eine obere Schranke in $\mathcal{F}$. Nach dem Lemma von Zorn gibt es also wenigstens ein maximales Element (H, f_H) in $\mathcal{F}$.

Ist $H \ne E$, so gibt es ein $x_0 \in E \setminus H$ und damit nach Lemma 6.2 ein lineares Funktional $f_{H_0} : H_0 := \mathrm{LH}(\{x_0\} \cup H) \to \mathbb{R}$ mit $f_{H_0}|_H \equiv f_H$ und $f_{H_0} \le p$ auf H_0. Dann ist aber (H_0, f_{H_0}) ein echt größeres Element aus $\mathcal{F}$ im Widerspruch zur maximalen Wahl von (H_0, f_{H_0}). Daher muß $H_0 = E$ gelten und $f_* := f_{H_0}$ erfüllt (6.2). □

6.4. Beispiel. Es gibt ein lineares Funktional LIM: $\ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ auf dem Raum $\ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{R})$ der beschränkten Folgen mit Werten in $\mathbb{R}$ mit

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \le \mathrm{LIM}(x) \le \limsup_{n\to\infty} x_n \tag{6.3}$$

für alle $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{R})$. Insbesondere gilt $\mathrm{LIM}(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$ für alle konvergenten Folgen $x = (x_n)_{n=1}^\infty$.

Beweis. Für $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{R})$ definieren wir $p(x) := \limsup_{n\to\infty} x_n$. Man rechnet unmittelbar nach, daß p ein sublineares Funktional auf $\ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{R})$ ist (welches übrigens weder linear noch eine Halbnorm ist). Der Raum $c(\mathbb{N},\mathbb{R})$ der konvergenten reellwertigen Folgen ist ein Untervektorraum auf dem durch $f(x) := \lim_{n\to\infty} x_n$ für alle $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in c(\mathbb{N},\mathbb{R})$ ein lineares Funktional $f : c(\mathbb{N},\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ mit $f \equiv p$ auf $c(\mathbb{N},\mathbb{R})$ definiert ist. Nach dem Satz 6.3 von Hahn–Banach gibt es also ein lineares Funktional LIM: $\ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, welches f auf ganz $\ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{R})$ fortsetzt und die rechte Ungleichung in (6.3) erfüllt. Zum Beweis der linken Ungleichung beachten wir, daß für alle $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{R})$ gilt

$$-\mathrm{LIM}(x) = \mathrm{LIM}(-x) \le p(-x) = \limsup_{n\to\infty}(-x_n) = -\liminf_{n\to\infty} x_n\,,$$

woraus die linke Ungleichung in (6.3) durch Multiplikation mit -1 folgt. □

Später, in Satz 6.8, werden wir sehen, daß man LIM sogar so finden kann, daß noch einige zusätzliche Eigenschaften erfüllt sind.

6.5. Satz von Hahn–Banach für reelle und komplexe Vektorräume. *Sei E ein $\mathbb{K}$–Vektorraum ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) und sei $p : E \to [0, \infty)$ eine Halbnorm auf E. Ist F eine Untervektorraum von E und $f : F \to \mathbb{K}$ ein $\mathbb{K}$–lineares Funktional auf F mit $|f(x)| \le p(x)$ für alle $x \in F$, so gibt es ein $\mathbb{K}$–lineares Funktional $f_0 : E \to \mathbb{K}$ auf E mit $|f_0(x)| \le p(x)$ für alle $x \in E$ und $f_0|_F \equiv f$.*

Beweis. (a) Wir führen den Beweis zunächst für den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Nach Voraussetzung gilt auf F: $f \le |f| \le p$. Nach dem Satz 6.3 von Hahn–Banach gibt es also ein lineares Funktional $f_0 : E \to \mathbb{R}$ mit $f_0|_F \equiv f$ und $f_0 \le p$ auf ganz E. Da dann auch

$$-f_0(x) = f_0(-x) \le p(-x) = p(x)$$

für alle $x \in E$ gelten muß, folgt $|f_0| \le p$ auf E.

(b) Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (Bohnenblust und Sobcyk): Da $\mathbb{R}$ ein Teilkörper von $\mathbb{C}$ ist, ist jeder $\mathbb{C}$–Vektorraum insbesondere auch ein $\mathbb{R}$–Vektorraum. Ist nun $f : F \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$–linear mit $|f| \le p$ auf F, so sind die Funktionale

$$\begin{aligned} f_1 &:= \operatorname{Re} f, \quad x \mapsto \operatorname{Re} f(x) \\ f_2 &:= \operatorname{Im} f, \quad x \mapsto \operatorname{Im} f(x) \end{aligned}$$

reell linear und erfüllen $|f_j| \le |f| \le p$ auf F für $j = 1, 2$. Nach (a) gibt es also ein reell lineares Funktional $g_1 : E \to \mathbb{R}$ mit $|g_1| \le p$ auf E und $g_1|_F \equiv \operatorname{Re} f$. Wir setzen $g_2(x) := -g_1(ix)$ für alle $x \in E$ und definieren $f_0 : E \to \mathbb{C}$ durch

$$f_0(x) := g_1(x) + ig_2(x) = g_1(x) - ig_1(ix) \quad \text{für alle } x \in E.$$

Zu zeigen ist nun:

(i) f_0 ist komplex linear.
(ii) $|f_0| \le p$ auf E.
(iii) $f_0|_F \equiv f$.

Zu (i): Da g_1 und g_2 reell linear sind, ist f_0 reell linear. Sei nun $x \in E$ und $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ beliebig mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f_0(\lambda x) &= g_1(\alpha x + i\beta x) - ig_1(i\alpha x - \beta x) = \alpha g_1(x) + \beta g_1(ix) - i\alpha g_1(ix) + i\beta g_1(x) = \\ &= \lambda g_1(x) - i\lambda g_1(ix) = \lambda f_0(x) \end{aligned}$$

Also ist f_0 komplex linear.

Zu (ii) Sei $x \in E$ beliebig. Dann gibt es ein $\varphi \in [0, 2\pi)$ mit $f_0(x) = e^{i\varphi}|f_0(x)|$. Es folgt:

$$|f_0(x)| = e^{-i\varphi} f_0(x) = f_0(e^{-i\varphi}x) = \operatorname{Re} f_0(e^{-i\varphi}x) = g_1(e^{-i\varphi}x) \le p(e^{-i\varphi}x) = p(x)$$

und damit (ii).

Zu (iii): Nach Konstruktion ist $g_1|_F \equiv \operatorname{Re} f$. Nun gilt für alle $x \in F$:

$$\begin{aligned} g_1(ix) + ig_1(x) &= \operatorname{Re} f(ix) + i \operatorname{Im} f(ix) = f(ix) = if(x) = i \operatorname{Re} f(x) - \operatorname{Im} f(ix) = \\ &= ig_1(x) - \operatorname{Im} f(x), \end{aligned}$$

d.h. es gilt $\operatorname{Im} f(x) = -g_1(ix)$. Damit folgt für alle $x \in F$:

$$f_0(x) = g_1(x) - ig_1(ix) = \operatorname{Re} f(x) + i \operatorname{Im} f(x) = f(x)\,.$$

□

6.6. Lemma. *Sei F ein abgeschlossener Untervektorraum eines normierten Raums E. Ist F_0 ein weiterer Untervektorraum von E mit $F \subset F_0$ und $\dim F_0/F < \infty$, so ist auch F_0 abgeschlossen.*

Beweis. F_0/F ist als endlich dimensionaler Unterraum des nach Lemma 1.20 normierten Raums E/F nach 1.17 abgeschlossen in E/F. Da der kanonische Epimorphismus $\pi : E \to E/F$ nach Lemma 1.20 stetig ist, ist auch $F_0 = \pi^{-1}(F_0/F)$ abgeschlossen in E. □

6.7. Folgerungen. *Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{K}$–Vektorraum.*

(a) *Ist F ein Untervektorraum von E und $f : F \to \mathbb{K}$ ein stetiges lineares Funktional auf F, so gibt es ein stetiges lineares Funktional $f_0 : E \to \mathbb{K}$ auf E mit $f_0|_F \equiv f$ und $\|f_0\|_{E'} = \|f\|_{F'}$.*

(b) *Ist F ein abgeschlossener Untervektorraum von E und $x_0 \in E \setminus F$, so gibt es ein $f_0 \in E'$ mit $\|f_0\|_{E'} = 1$, $f_0|_F \equiv 0$ und $f_0(x_0) = \inf_{x \in F} \|x_0 - x\|$.*

(c) *Zu jedem $x_0 \in E$ mit $\|x_0\| = 1$ gibt es ein $f_0 \in E'$ mit $\|f_0\|_{E'} = 1 = f_0(x_0)$.*

Beweis. (a) $p : E \to [0, \infty)$ mit $p(x) := \|f\|_{F'}\|x\|$ für alle $x \in E$ ist eine Halbnorm auf E mit $|f| \leq p$ auf F. Nach der Variante 6.5 des Satzes von Hahn–Banach gibt es also ein lineares Funktional $f_0 : E \to \mathbb{K}$ mit $f_0|_F \equiv f$ und $|f_0(x)| \leq p(x) = \|f\|_{F'}\|x\|$ für alle $x \in E$. Insbesondere ist f_0 stetig und $\|f_0\|_{E'} \leq \|f\|_{F'}$. Wegen $\|f\|_{F'} \leq \|f_0\|_{E'}$ folgt die Behauptung.

(b) Wir setzen $F_0 :=\mathrm{LH}(F \cup \{x_0\})$. Da F ein abgeschlossener Untervektorraum von E ist, ist F_0 nach Lemma 6.6 abgeschlossen und es ist $d := \mathrm{dist}(x_0, F) = \inf_{x \in F} \|x_0 - x\| > 0$. Durch $f(x + \lambda x_0) := \lambda d$ für alle $x \in F$, $\lambda \in \mathbb{K}$ ist ein lineares Funktional $f : F_0 \to \mathbb{K}$ gegeben mit $f|_F \equiv 0$ und

$$\|f\|_{F_0'} = \sup_{0 \neq y \in F_0} \frac{|f(y)|}{\|y\|} = \sup_{0 \neq \lambda \in \mathbb{K}, x \in F} \frac{|f(x + \lambda x_0)|}{\|x + \lambda x_0\|} = \sup_{0 \neq \lambda \in \mathbb{K}, x \in F} \frac{|\lambda| d}{\|x + \lambda x_0\|} =$$
$$= d \sup_{0 \neq \lambda \in \mathbb{K}} \sup_{x \in F} \frac{1}{\|\frac{1}{\lambda}x + x_0\|} = d \sup_{0 \neq \lambda \in \mathbb{K}} \frac{1}{\inf_{u \in F} \|u + x_0\|} = 1\,.$$

Nach Teil (a) gibt es also ein $f_0 \in E'$ mit $\|f_0\|_{E'} = 1$ und $f_0|_{F_0} \equiv f$. Dieses stetige lineare Funktional hat die gewünschten Eigenschaften.

(c) erhält man aus (b) in dem Spezialfall $F = \{0\}$. □

Als Anwendung beweisen wir die schon angekündigte Verschärfung von 6.4:

6.8. Satz (Banach–Grenzwerte). *Es gibt ein lineares Funktional L auf $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ so daß gilt:*

(a) *$L(\mathbf{1}) = 1$, wobei $\mathbf{1}$ die konstante Folge $(1)_{n=1}^\infty$ bezeichne.*

(b) *$L(x) \geq 0$ für alle $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ mit x_n reell und $x_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

(c) *Mit $Sx := (x_{n+1})_{n=1}^\infty$ für alle $x \in \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ gilt $L(Sx) = L(x)$ für alle $x \in \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{C})$.*

(d) *L ist stetig mit $\|L\| = 1$.*

Funktionale mit den Eigenschaften (a)-(c) heißen auch Banach-Grenzwerte. Sie haben zusätzlich folgende Eigenschaften:

(e) *Für alle $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ gilt*
$$|L(x)| \leq \limsup_{n \to \infty} |x_n|\,.$$

(f) *Für alle reellwertigen Folgen $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ gilt*
$$\liminf_{n \to \infty} x_n \leq L(x) \leq \limsup_{n \to \infty} x_n\,.$$

(g) *Für alle konvergenten Folgen $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ gilt $L(x) = \lim_{n \to \infty} x_n$.*

Beweis. Sei $F := \overline{\mathrm{ran}(1-S)}$. Dies ist ein abgeschlossener Untervektorraum von $\ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{C})$. Wegen $0 \in F$ ist $\mathrm{dist}(\mathbf{1},F) \le 1$. Wir zeigen zunächst:

(i) $\mathrm{dist}(\mathbf{1},F) = 1$.

Zum Beweis gehen wir indirekt vor und nehmen an, es ist $\mathrm{dist}(\mathbf{1},F) < c < 1$. Dann gibt es eine Folge $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{C})$ mit

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - x_{n+1} - 1| < c\,.$$

Es folgt mit $\varepsilon_n := x_n - x_{n+1} - 1$:

$$x_1 - x_{n+1} = n + \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}\,.$$

Wegen $|\varepsilon_k| < c$ für alle $k \in \mathbb{N}$ erhalten wir:

$$|x_1 - x_{n+1}| \ge n - nc \to \infty \quad \text{für } n \to \infty$$

im Widerspruch zur Beschränktheit der Folge $x = (x_n)_{n=1}^\infty$. Also muß doch (i) gelten.

(ii) Wir fassen $\ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{C})$ als $\mathbb{R}$–Vektorraum auf und F als $\mathbb{R}$–Untervektorraum von $\ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{C})$. Nach Folgerung 6.7 (b) gibt es ein $\mathbb{R}$–lineares Funktional $L_\mathbb{R} : \ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{C}) \to \mathbb{R}$ mit $\|L_\mathbb{R}\| = 1$, $L_\mathbb{R}|_F \equiv 0$ und $L_\mathbb{R}(\mathbf{1}) = \mathrm{dist}(\mathbf{1},F) = 1$. Für alle $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{C})$ definieren wir reellwertige Folgen $\mathrm{Re}(x) := (\mathrm{Re}(x_n))_{n=1}^\infty$, $\mathrm{Im}(x) := (\mathrm{Im}(x_n))_{n=1}^\infty$. Hiermit ist $x = \mathrm{Re}(x) + i\,\mathrm{Im}(x)$. Durch direktes Nachrechnen sieht man, daß durch $L(x) := L_\mathbb{R}(\mathrm{Re}(x)) + iL_\mathbb{R}(\mathrm{Im}(x))$ ein $\mathbb{C}$-lineares Funktional $L : \ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ definiert ist. Nach Konstruktion erfüllt L die Bedingung (a) und wegen $\mathrm{Re}(x - Sx) = (1-S)\,\mathrm{Re}(x)$, $\mathrm{Im}(x - Sx) = (1-S)\,\mathrm{Im}(x))$ für alle $x \in \ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{C})$ und $L_\mathbb{R}|_{\mathrm{ran}(1-S)} \equiv 0$ auch (c).

(iii) Wir zeigen nun $\|L\| = 1$: Sei hierzu $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{C})$ beliebig mit $\|x\|_\infty \le 1$. Sei $\varphi \in \mathbb{R}$ mit $|L(x)| = e^{i\varphi}L(x)$. Wegen der Linearität von L und $\|L_\mathbb{R}\| = 1$ folgt

$$|L(x)| = L(e^{i\varphi}x) = \mathrm{Re}(L(e^{i\varphi}x)) = L_\mathbb{R}(\mathrm{Re}(e^{i\varphi}x)) \le \|\mathrm{Re}(e^{i\varphi}x)\|_\infty \le \|x\|_\infty \le 1\,.$$

Also ist L stetig mit $\|L\| \le 1$. Wegen $L(\mathbf{1}) = 1 = \|\mathbf{1}\|_\infty$ folgt $\|L\| = 1$.

(iv) Sei nun $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{R})$ mit $x_n \ge 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es folgt $0 \le x_n \le \|x\|_\infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und hieraus $\|x - \frac{1}{2}\|x\|_\infty\mathbf{1}\| \le \frac{1}{2}\|x\|_\infty$. Wegen (a) und $\|L\| = 1 = L(\mathbf{1})$ ergibt sich

$$\Big|L(x) - \frac{1}{2}\|x\|_\infty\Big| = \Big|L\Big(x - \frac{1}{2}\|x\|_\infty\mathbf{1}\Big)\Big| \le \frac{1}{2}\|x\|_\infty$$

und hieraus (wegen $L(x) = L_\mathbb{R}(x) \in \mathbb{R}$):

$$-\frac{1}{2}\|x\|_\infty \le L(x) - \frac{1}{2}\|x\|_\infty \le \frac{1}{2}\|x\|_\infty,$$

d.h. $0 \le L(x) \le \|x\|_\infty$. Damit ist (b) gezeigt.

(v) Zu (e): Sei $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{C})$ und $\varepsilon > 0$ beliebig und $\alpha := \limsup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \ge n_0$ gilt: $|x_n| < \alpha + \varepsilon$. Insbesondere folgt $\|S^{n_0}(x)\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_{k+n_0}| \le \alpha + \varepsilon$. Wegen (c) ergibt sich:

$$|L(x)| = |L(S^{n_0}(x))| \le \|S^{n_0}(x)\|_\infty \le \alpha + \varepsilon\,.$$

Da dies für alle $\varepsilon > 0$ gilt, erhalten wir (e).

(vi) Zu (f): Sei $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{R})$ beliebig. Mit $\alpha := \liminf_{n\to\infty} x_n$ und $\beta := \limsup_{n\to\infty} x_n$ gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \Big|x_n - \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\Big| \le \frac{\beta-\alpha}{2}$$

Nach (e) und (a) erhalten wir

$$\Big|L(x) - \frac{\alpha+\beta}{2}\Big| = \Big|L\Big(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\mathbf{1}\Big)\Big| \le \frac{\beta-\alpha}{2}\,.$$

Wegen $L(x) \in \mathbb{R}$ folgt hieraus

$$-\frac{\beta-\alpha}{2} \leq L(x) - \frac{\alpha+\beta}{2} \leq \frac{\beta-\alpha}{2}\,,$$

woraus sich (f) ergibt.

(vii) Zu (g): Sei nun $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ eine in $\mathbb{C}$ konvergente Folge. Dann sind die Folgen $\mathrm{Re}(x)$ und $\mathrm{Im}(x)$ konvergente reellwertige Folgen. Nach (f) gilt also

$$L(x) = L(\mathrm{Re}(x)) + iL(\mathrm{Im}(x)) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(x_n) + i \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n\,.$$

□

Eine stetige lineare Abbildung $P : E \to E$ von einem normierten $\mathbb{K}$–Vektorraum $(E, \|\cdot\|)$ in sich heißt *stetige Projektion*, falls $P^2 = P$ gilt und ein Unterraum F von $(E, \|\cdot\|)$ heißt *stetig projiziert*, falls es eine stetige Projektion $P \in \mathcal{L}(E)$ mit $\operatorname{ran} P = F$ gibt. Wegen $F = \ker 1 - P$ ist F dann insbeondere abgeschlossen. Nach dem Projektionssatz ist jeder abgeschlossene Unterraum eines Hilbertraums stetig projiziert (sogar mit einer orthogonalen Projektion). In Banachräumen, die nicht topologisch isomorph zu einem Hilbertraum sind, ist dies im Allgemeinen nicht mehr richtig. Mit Hilfe des Fortsetzungssatzes von Hahn und Banach kann man jedoch zeigen, daß endlich dimensionale Untervektorräume und abgeschlossenen Untervektorräume von endlicher Kodimension in einem normierten Raums stets stetig projiziert sind. Zunächst zeigen wir ein Lemma von Auerbach:

6.9. Lemma (von Auerbach). *Sei $(F, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum mit $\dim F = n < \infty$. Dann gibt es $x_1, \dots, x_n \in F$ und $x_1', \dots, x_n' \in F'$ mit $\|x_j\| = \|x_j'\| = x_j'(x_j) = 1$ für $j = 1, \dots, n$ und $x_j'(x_k) = 0$ für alle $j, k \in \{1, \dots, n\}$ mit $j \neq k$. Insbesondere ist $x_1, \dots, x_n$ eine Basis von F.*

Beweis. Sei $e_1, \dots, e_n$ eine Basis von F. Dann hat jedes Element $x \in F$ eine eindeutige Darstellung der Form

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x) e_j$$

mit $\alpha_1(x), \dots, \alpha_n(x) \in \mathbb{K}$. Die durch

$$V(u_1, \dots, u_n) := \det(\alpha_j(u_k))_{j,k=1,\dots n} \qquad (u_1, \dots, u_n \in F)$$

definierte Abbildung $V : F^n \to \mathbb{K}$ ist dann eine stetige, alternierende Multilinearform auf F^n. Wegen der Kompaktheit von $(\partial B_F)^n$ gibt es $x_1, \dots, x_n \in F$ mit $\|x_j\| = 1$ für $j = 1, \dots, n$ und mit

$$V(x_1, \dots, x_n) = \max_{u_1,\dots,u_n \in \partial B_F} |V(u_1, \dots, u_n)|.$$

Für $j = 1, \dots, n$ definieren wir nun stetige lineare Funktionale $x_j' : F \to \mathbb{K}$ durch

$$x_j'(x) := \frac{V(x_1, \dots, x_{j-1}, x, x_{j+1}, \dots, x_n)}{V(x_1, \dots, x_n)}\,.$$

Direkte Rechnung zeigt nun, daß $x_1, \dots, x_n$, $x_1', \dots, x_n'$ die gewünschten Eigenschaften besitzen. □

Wir zeigen nun die angekündigten Projektionsaussagen:

6.10. Satz. *Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum und $n \in \mathbb{N}$.*

(a) *Ist F ein Untervektorraum der Dimension n von E, so gibt es eine Projektion $P \in \mathcal{L}(E)$ mit $\operatorname{ran} P = F$ und $\|P\| \leq n$.*

(b) *Ist F ein abgeschlossener Untervektorraum der Kodimension n von E und ist $\varepsilon > 0$ beliebig, so gibt es eine Projektion $P \in \mathcal{L}(E)$ mit* $\operatorname{ran} P = F$ *und* $\|P\| \leq n + 1 + \varepsilon$.

Beweis. (a) Nach dem Auerbachlemma gibt es $x_1, \dots, x_n \in F$, $x'_1, \dots, x'_n \in F'$ mit $\|x_j\| = \|x'_j\| = x'_j(x_j) = 1$ für $j = 1, \dots, n$ und $x'_j(x_k) = 0$ für alle $j, k \in \{1, \dots, n\}$ mit $j \neq k$. Nach dem Satz von Hahn-Banach (in der Form von Folgerung 6.7 (a)) gibt es $y'_1, \dots y'_n \in E'$ mit $y'_j|_F \equiv x'_j$ und $\|y'_j\|_{E'} = \|x'_j\|_{F'} = 1$, $j = 1, \dots, n$. Durch

$$P(y) := \sum_{j=1}^{n} y'_j(y) x_j \qquad (y \in E)$$

ist also eine stetige lineare Abbildung mit Bild in F auf E definiert. Wegen

$$\|P(y)\| \leq \sum_{j=1}^{n} |y'_j(y)| \|x_j\| \leq \sum_{j=1}^{n} \|y'_j\|_{E'} \|y\| \cdot |\|x_j\| = n\|y\|$$

ist $\|P\| \leq n$. Ist $x \in F$ beliebig, so hat x eine eindeutige Darstellung der Form

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \qquad \text{mit} \quad \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}.$$

Es folgt

$$P(x) = \sum_{j=1}^{n} y'_j(x) x_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k y'_j(x_k) x_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x'_j(x_k) x_j = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k = x.$$

Insbesondere gilt $P^2 = P$ und $\operatorname{ran} P = F$.

(b) Wegen $\dim E/F = n < \infty$ gibt es nach dem Auerbachlemma Punkte $\xi_1, \dots, \xi_n \in E/F$ und stetige lineare Funktionale $\xi'_1, \dots, \xi'_n \in (E/F)'$ mit $\|\xi_j\|_{E/F} = \|\xi'_j\|_{(E/F)'} = 1$ und $\xi'_j(\xi_k) = \delta_{j,k}$ für alle $j, k \in \{1, \dots, n\}$. Bezeichnet $\pi : E \to E/F$ den kanonischen Epimorphismus, so ist $x'_j := \xi'_j \circ \pi \in E'$ mit $\|x'_j\|_{E'} \leq \|\xi'_j\|_{(E/F)'} \|\pi\| = 1$ für $j = 1, \dots, n$. Nach Definition der Norm im Quotientenraum gilt

$$1 = \|\xi_j\|_{E/F} = \inf_{x \in \xi_j} \|x\| \qquad (j = 1, \dots, n).$$

Insbesondere gibt es also zu $\varepsilon > 0$ Elemente $x_j \in E$ mit $\pi(x_j) = \xi_j$ und $\|x_j\| < 1 + \frac{\varepsilon}{n}$ für $j = 1, \dots, n$. Wegen $x'_j(x_k) = \xi'_j(\xi_k) = \delta_{j,k}$ für alle $j, k \in \{1, \dots, n\}$ sind die Vektoren $x_1, \dots, x_n$ linear unabhängig und der von diesen Vektoren erzeugte Untervektorraum F_0 hat die Dimension n.

Wir definieren nun für alle $x \in E$:

$$Qx := x - \sum_{k=1}^{n} x'_k(x) x_k\,, \qquad Px := (1 - Q)x = \sum_{k=1}^{n} x'_k(x) x_k\,.$$

Wie im Beweis zu (a) sieht man, daß P (und damit auch $Q = 1 - P$) eine stetige lineare Projektion mit $\ker Q = \operatorname{ran} P = F_0$ ist. Mit der Dreiecksungleichung folgt für alle $x \in E$:

$$\|Q(x)\| \leq \|x\| + \sum_{k=1}^{n} |x'_k(x)| \cdot \|x_k\| \leq \|x\| \cdot \Big(1 + n\big(1 + \frac{\varepsilon}{n}\big)\Big) \leq (n + 1 + \varepsilon)\|x\|$$

und somit $\|Q\| \leq n + 1 + \varepsilon$. Wegen $F = \ker \pi \subseteq \ker x'_j$, $j = 1, \dots, n$, gilt $Q(x) = x$ für alle $x \in F$ und daher $F \subseteq \operatorname{ran} Q$. Da F von der Kodimension n in E ist und $\ker Q = F_0$ die Dimension n hat, muß $F = \operatorname{ran} Q$ gelten. $\square$

6.11. Trennungssatz von Hahn–Banach. *Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{K}$–Vektorraum und seien A, B zwei disjunkte, konvexe, nicht leere Teilmengen von E.*

(a) *Ist A offen, so gibt es ein $f \in E'$ und ein $\gamma \in \mathbb{R}$ mit*

$$\forall a \in A, b \in B : \quad \operatorname{Re} f(a) < \gamma \leq \operatorname{Re} f(b).$$

(b) *Ist A kompakt und B abgeschlossen, so gibt es $f \in E'$, $\gamma \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ mit*

$$\forall a \in A, b \in B : \quad \operatorname{Re} f(a) < \gamma - \varepsilon < \gamma < \operatorname{Re} f(b).$$

Beweis. (i) Sei zunächst $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ vorausgesetzt.

(a) Seien $a_0 \in A$ und $b_0 \in B$ fest gewählt. Mit $x_0 := b_0 - a_0$ gilt: $C := x_0 + A - B$ ist eine offene, konvexe Nullumgebung in E. Wir definieren $p : E \to [0, \infty)$ durch

$$p(x) := \inf\{\rho > 0\,;\, x \in \rho C\}\,.$$

Man rechnet nach, daß p sublinear ist. Wegen $A \cap B = \emptyset$ ist $x_0 \notin C$ und daher $p(x_0) \geq 1$. Wir setzen $F := \mathrm{LH}\{x_0\}$ und definieren ein lineares Funktional $f_0 : F \to \mathbb{R}$ durch $f_0(\lambda x_0) := \lambda$ für alle $\lambda x_0 \in F$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Es folgt:

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in [0, \infty) : \quad f_0(\lambda x_0) =& \lambda \leq \lambda p(x_0) = p(\lambda x_0), \\ \forall \lambda \in (-\infty, 0) : \quad f_0(\lambda x_0) =& \lambda < 0 \leq p(\lambda x_0) \end{aligned}$$

und damit $f_0(x) \leq p(x)$ auf F. Nach dem Satz 6.3 von Hahn–Banach gibt es also ein lineares Funktional $f : E \to \mathbb{R}$ mit $f|_F \equiv f_0$ und $f \leq p$ auf E. Insbesondere ist $f \leq 1$ auf C und daher

$$-1 \leq f \quad \text{auf } -C.$$

Für alle $x \in V := C \cap (-C)$ ist also $|f(x)| \leq 1$. Da V eine konvexe Nullumgebung ist, folgt $f \in E'$. Ferner gilt für alle $a \in A, b \in B$:

$$f(a) - f(b) + 1 = f(a - b + x_0) \leq p(a - b + x_0) < 1,$$

da $a - b + x_0 \in C$ und C offen ist. Also gilt

$$\forall a \in A, b \in B : \quad f(a) < f(b).$$

Insbesondere ist f nicht konstant, somit $f(E) = \mathbb{R}$. Wir setzen nun $\gamma := \sup_{a \in A} f(a)$. Wäre $\gamma \in f(A)$, also $\gamma = f(a)$ für ein $a \in A$, so gäbe es, da A offen ist, ein $\delta > 0$ mit $(1 \pm \delta)a \in A$ und es würde folgen $(1 \pm \delta)\gamma = (1 \pm \delta) f(a) \in f(A)$ im Widerspruch zur Definition von γ. Daher ist $\gamma \notin f(A)$ und es folgt

$$\forall a \in A, b \in B : \quad f(a) < \gamma \leq f(b).$$

(b) Da A kompakt und B abgeschlossen ist mit $A \cap B = \emptyset$, ist $\operatorname{dist}(A, B) > 0$. es gibt also ein $\delta > 0$ mit $\operatorname{dist}(A, B) > \delta$. Es folgt daher $(A + U_\delta(0)) \cap B = \emptyset$. Da $A + U_\delta(0)$ offen und konvex ist, gibt es nach (a) ein $f \in E'$ und ein $\gamma_1 > 0$ mit

$$\forall a \in A + U_\delta(0), b \in B : \quad f(a) < \gamma_1 \leq f(b).$$

Wegen der Stetigkeit von f ist $f(A)$ eine kompakte Teilmenge von $(-\infty, \gamma_1)$. Es gibt also ein $\varepsilon_1 > 0$ mit $f(a) < \gamma_1 - \varepsilon_1$. Mit $\gamma := \gamma_1 - \varepsilon_1/2$ und $\varepsilon := \varepsilon_1/2$ folgt die Behauptung.

(ii) Sei nun $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Indem man E zunächst als $\mathbb{R}$–Vektorraum auffaßt, findet man gemäß (i) ein stetiges, reell–lineares Funktional $f_1 : E \to \mathbb{R}$ mit den gewünschten Eigenschaften. Sodann definiert man für alle $x \in E$: $f(x) := f_1(x) - i f_1(ix)$ und rechnet nach, daß f komplex–linear ist. Es folgt $f \in E'$ und f hat wegen $\operatorname{Re} f = f_1$ die gewünschten Eigenschaften. $\square$

Übungsaufgaben zu Kapitel 6.

6.1. Aufgabe. (a) Zeigen Sie, daß in jedem normierten Raum X gilt:

$$\|x\| = \sup\{|\varphi(x)| \,;\, \varphi \in X',\ \|\varphi\| \leq 1\}.$$

(b) Ist X ein normierter Raum und U ein Untervektorraum, so sind äquivalent:
 (i) U liegt dicht in X.
 (ii) Falls $\varphi \in X'$ und $\varphi|_U = 0$, so gilt $\varphi = 0$.

6.2. Aufgabe. Sei X ein Banachraum und M ein Unterraum von X. Der *Annihilator* $M^\perp$ von M ist definiert als

$$M^\perp := \{\varphi \in X' \,;\, \varphi(x) = 0 \text{ für alle } x \in M\} \subset X'.$$

Sei nun M ein abgeschlossener Unterraum von X. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung

$$s : M' \to X'/M^\perp, \qquad s(\psi) := \varphi + M^\perp,$$

mit einer Hahn-Banach Fortsetzung φ von ψ auf X, ist ein isometrischer Isomorphismus von M' auf $X'/M^\perp$, wenn $X'/M^\perp$ mit der Quotientennorm versehen ist.

(b) Sei $\pi : X \to X/M$ die Quotientenabbildung. Dann ist die Abbildung

$$t : (X/M)' \to M^\perp, \qquad t(\varphi) := \varphi \circ \pi$$

ein isometrischer Isomorphismus von $(X/M)'$ auf $M^\perp$.

6.3. Aufgabe. Sei X ein normierter Raum. Mit X'' bezeichnet man den Dualraum von X', er wird *Bidual von X* genannt.

(a) Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$i : X \to X'', \quad (i(x))(\varphi) := \varphi(x)$$

eine lineare Isometrie ist.

Die Abbildung i ist i.a. nicht surjektiv. Ein Banachraum heißt *reflexiv*, falls die Abbildung i surjektiv ist.

(b) Zeigen Sie, daß abgeschlossene Unterräume reflexiver Räume wieder reflexiv sind.

6.4. Aufgabe. (a) Zeigen Sie: Jeder Banachraum kann isometrisch in

$$\ell^\infty(I) := \{(x_i)_{i\in I} \,;\, x_i \in \mathbb{C},\ \|(x_i)_{i\in I}\|_\infty := \sup_{i\in I} |x_i| < \infty\}$$

eingebettet werden für eine geeignete Indexmenge I.

(b) Jeder separable Banachraum kann isometrisch in $\ell^\infty(\mathbb{N})$ eingebettet werden.

6.5. Aufgabe. Zeigen Sie: Jeder Banachraum E ist Quotient eines $\ell^1(I)$-Raumes nach einem abgeschlossenen Unterraum.

Hinweis: Wählen Sie $I = \{x \in E \,:\, \|x\| \leq 1\}$.

KAPITEL 7

Banachalgebren: Erste Eigenschaften

Weiterhin sei stets $\mathbb{K}$ der Körper der reellen oder komplexen Zahlen.

7.1. Definition. Sei $\mathfrak{R}$ eine Algebra über $\mathbb{K}$. Wir nennen $\mathfrak{R}$ eine *normierte* $\mathbb{K}$*–Algebra*, falls auf $\mathfrak{R}$ eine Norm $\|\cdot\|$ gegeben ist, so daß $(\mathfrak{R}, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{K}$–Vektorraum ist und so daß $\|\cdot\|$ *submultiplikativ* ist, d.h.

$$\forall a, b \in \mathfrak{R}: \quad \|ab\| \leq \|a\| \cdot \|b\| .$$

Eine vollständige normierte $\mathbb{K}$–Algebra nennen wir auch eine *Banachalgebra*.

Beispiele von Banachalgebren sind uns schon mehrfach im Rahmen dieser Vorlesung begegnet. Wir wollen uns nun systematischer mit der Theorie der Banachalgebren befassen.

7.2. Satz. *Sei $\mathfrak{R}$ eine $\mathbb{K}$–Algebra, die mit einer Norm $\|\cdot\|_{\mathfrak{R}}$ versehen sei, so daß gilt:*
(i) *$(\mathfrak{R}, \|\cdot\|_{\mathfrak{R}})$ ist ein Banachraum.*
(ii) *Für alle $x \in \mathfrak{R}$ sind die linearen Abbildungen*

$$L(x) : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}, \quad y \mapsto xy \text{ und}$$
$$R(x) : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}, \quad y \mapsto yx \text{ stetig.}$$

Dann gibt es eine zu $\|\cdot\|_{\mathfrak{R}}$ äquivalente Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathfrak{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:
(a) *$\forall x, y \in \mathfrak{R}: \quad \|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$, d.h. $(\mathfrak{R}, \|\cdot\|)$ ist eine Banachalgebra.*
(b) *Besitzt $\mathfrak{R}$ ein Einselement 1, so kann $\|\cdot\|$ zusätzlich so gewählt werden, daß $\|1\| = 1$ gilt.*

Beweis. Wir betrachten den Banachraum

$$(E, \|\cdot\|_E) := \begin{cases} (\mathfrak{R}, \|\cdot\|_{\mathfrak{R}}) & \text{falls } \mathfrak{R} \text{ ein Einselement 1 besitzt,} \\ (\mathfrak{R} \oplus \mathbb{K} \cdot 1, \|\cdot\|_E) & \text{sonst,} \\ & \text{wobei } \|a + k \cdot 1\|_E := \|a\|_{\mathfrak{R}} + |k| \text{ für alle } a \in \mathfrak{R}, k \in \mathbb{K}. \end{cases}$$

Die Abbildung $L : \mathfrak{R} \to \mathcal{L}(E)$ mit $L(x)(a + k \cdot 1) := xa + kx$ für alle $x, a \in \mathfrak{R}$, $k \in \mathbb{K}$ ist ein Monomorphismus (wegen $L(x) = 0 \Longrightarrow 0 = L(x)(1) = x$) mit $L(1) = \mathrm{id}_E$ falls $\mathfrak{R}$ ein Einselement besitzt. Nach Definition der Operatornorm in $\mathcal{L}(E)$ gilt für alle $x \in \mathfrak{R}$:

$$\|L(x)\|_{\mathcal{L}(E)} = \sup_{u \in B_E} \|L(x)u\|_E \geq \|x \frac{1}{\|1\|_E} \cdot 1\|_E = \frac{\|x\|_{\mathfrak{R}}}{\|1\|_E} .$$

Damit folgt

$$\forall x \in \mathfrak{R}: \quad \|x\|_{\mathfrak{R}} \leq \|1\|_E \cdot \|L(x)\|_{\mathcal{L}(E)} . \tag{7.1}$$

Durch $\|x\| := \|L(x)\|_{\mathcal{L}(E)}$ für alle $x \in \mathfrak{R}$ ist also eine submultiplikative Norm auf $\mathfrak{R}$ gegeben. Besitzt $\mathfrak{R}$ ein Einselement 1, so gilt wegen $L(1) = \mathrm{id}_E$: $\|1\| = \|L(1)\|_{\mathcal{L}(E)} = 1$.

Wir zeigen, daß $\operatorname{ran} L = L(\mathfrak{R})$ vollständig ist. Sei hierzu $(L(x_n))_{n=1}^{\infty}$ eine beliebige Cauchyfolge in $L(\mathfrak{R})$. Wegen der Vollständigkeit von $\mathcal{L}(E)$ folgt $L(x_n) \to T$ bezüglich $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E)}$ für ein $T \in \mathcal{L}(E)$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n, m \geq n_0$ gilt:

$$\|x_n - x_m\|_{\mathfrak{R}} \leq \|L(x_n) - L(x_m)\|_{\mathcal{L}(E)} \cdot \|1\|_E < \varepsilon ,$$

wobei die linke Ungleichung aus (7.1) folgt. Die Folge $(x_n)_{n=1}^\infty$ ist also eine Cauchyfolge in $\mathfrak{R}$ und konvergiert daher (wegen der Vollständigkeit von $\mathfrak{R}$) gegen ein $x \in \mathfrak{R}$ bezüglich $\|\cdot\|_{\mathfrak{R}}$. Für alle $a + k \cdot 1 \in E$, $a \in \mathfrak{R}, k \in \mathbb{K}$, gilt dann bei $n \to \infty$:

$$L(x_n)(a+k\cdot 1) = x_n a + kx_n = R(a)x_n + kx_n \to R(a)x + kx = xa + kx = L(x)(a+k\cdot 1),$$

da $R(a) : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}$ nach Voraussetzung stetig ist. Wegen $L(x_n)(a+k\cdot 1) \to T(a+k\cdot 1)$ für $n \to \infty$, folgt $T = L(x) \in L(\mathfrak{R})$. Damit ist die Vollständigkeit von $L(\mathfrak{R})$ gezeigt.

Die Abbildung $L : \mathfrak{R} \to L(\mathfrak{R})$ ist also ein Algebrenisomorphismus von der Algebra $\mathfrak{R}$ auf die Banachalgebra $(L(\mathfrak{R}), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(E)}|_{L(\mathfrak{R})})$. Da die Umkehrabbildung $L^{-1} : L(\mathfrak{R}) \to \mathfrak{R}$ nach (7.1) stetig ist und $\mathfrak{R}, L(\mathfrak{R})$ Banachräume sind, folgt nach dem Satz von der inversen Abbildung auch die Stetigkeit von $L : \mathfrak{R} \to L(\mathfrak{R})$. Es gibt daher Konstanten $c, C > 0$ mit

$$\forall x \in \mathfrak{R} : \quad c\|x\|_{\mathfrak{R}} \le \|L(x)\|_E = \|x\| \le C\|x\|_{\mathfrak{R}}\,.$$

Die Normen $\|\cdot\|_{\mathfrak{R}}$ und $\|\cdot\|$ sind also äquivalente Normen auf $\mathfrak{R}$. □

7.3. Folgerung. *Zu jeder Banachalgebra $(\mathfrak{R}, \|\cdot\|_{\mathfrak{R}})$ mit Einselement 1 gibt es eine zur Ausgangsnorm äquivalente submultiplikative Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathfrak{R}$ mit $\|1\| = 1$.*

Einige Autoren wie z.B. Neumark, Rudin und andere verlangen von einer Banachalgebra, daß sie (a) und (b) in Satz 7.2 erfüllt. Andere wie z.B. Zelasko nennen eine $\mathbb{K}$–Algebra schon dann eine Banachalgebra, wenn sie den Voraussetzungen zu Satz 7.2 genügt. Da man durch Übergang zu einer äquivalenten Norm stets erreichen kann, daß (a) und (b) in Satz 7.2 erfüllt sind, schließe ich mich den erstgenannten Autoren an.

7.4. Lemma. *Sei $\mathfrak{R}$ eine normierte $\mathbb{K}$–Algebra und sei $\mathfrak{A}$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{R}$. Dann gilt:*

(a) *$\overline{\mathfrak{A}}$ ist eine Unteralgebra von $\mathfrak{R}$.*
(b) *Ist $\mathfrak{A}$ kommutativ, so auch $\overline{\mathfrak{A}}$.*
(c) *Ist $\mathfrak{A}$ eine maximale kommutative Unteralgebra, so ist $\mathfrak{A}$ schon abgeschlossen.*

Dies rechnet man unmittelbar nach.

7.5. Lemma. *Sei $\mathfrak{R}$ eine normierte $\mathbb{K}$–Algebra und sei $\emptyset \ne \mathcal{S} \subseteq \mathfrak{R}$. Dann sind die Kommutantenalgebra $\mathcal{S}' = \{x \in \mathfrak{R}\,;\, \forall a \in \mathcal{S} : ax = xa\}$, die Bikommutantenalgebra $\mathcal{S}'' := (\mathcal{S}')'$ und das Zentrum $Z(\mathfrak{R}) := \mathfrak{R}'$ abgeschlossene Unteralgebren von $\mathfrak{R}$.*

Beweis. Ist $x \in \overline{\mathcal{S}'}$, so gibt es eine Folge $(x_n)_{n=1}^\infty$ in $\mathcal{S}'$ mit $x_n \to x$ für $n \to \infty$. Wegen der Stetigkeit der Multiplikation folgt dann für alle $a \in \mathcal{S}$:

$$xa - ax = \lim_{n\to\infty}(x_n a - a x_n) = 0, \quad \text{d.h. } x \in \mathcal{S}'.$$

$\mathcal{S}'$ ist also abgeschlossen in $\mathfrak{R}$. Wegen $\mathcal{S}'' = (\mathcal{S}')'$ und $Z(\mathfrak{R}) = \mathfrak{R}'$ sind dann auch $\mathcal{S}''$ und $Z(\mathfrak{R})$ abgeschlossen in $\mathfrak{R}$. □

Falls nicht anders vermerkt sei im folgenden stets $\mathfrak{R}$ eine Banachalgebra mit Einselement 1 und $\|1\| = 1$. $G = G(\mathfrak{R})$ sei die Menge der invertierbaren Elemente von $\mathfrak{R}$, $G_l = G_l(\mathfrak{R})$ die Menge der linksinvertierbaren Elemente und $G_r = G_r(\mathfrak{R})$ die Menge der rechtsinvertierbaren Elemente von $\mathfrak{R}$. Offensichtlich gilt $G = G_l \cap G_r$ und G ist mit der Multiplikation als Verknüpfung eine Gruppe.

7.6. Lemma. *Es ist $U := \{x \in \mathfrak{R}\,;\, \|1 - x\| < 1\} \subset G$ und die Abbildung $u \mapsto u^{-1}$ von U nach $\mathfrak{R}$ ist stetig in 1.*

Beweis. Wir setzen $(1-x)^0 := 1$ und definieren für beliebiges $x \in U$:

$$y := \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^n.$$

Wegen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|(1-x)^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|(1-x)\|^n = \frac{1}{1-\|1-x\|} < \infty$$

ist die Reihe absolut konvergent in $\mathfrak{R}$, d.h. es ist $y \in \mathfrak{R}$. Ferner folgt wegen der Stetigkeit der Multiplikation in $\mathfrak{R}$:

$$y = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (1-x)^n = 1 + \left(\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^n\right)(1-x) = 1 + y(1-x) \tag{7.2}$$

und damit $yx = 1$. Ebenso zeigt man $xy = 1$. Also ist x invertierbar und $x^{-1} = y$.

Zu zeigen ist noch die Stetigkeit der Inversion in 1: Ist $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben, so wählt man $\delta := \min\{1/2, \varepsilon/2\}$ und es folgt nach (7.2) für alle $x \in \mathfrak{R}$ mit $\|1-x\| < \delta$:

$$\|x^{-1} - 1\| = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} (1-x)^n\right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|(1-x)\|^n = \frac{\|1-x\|}{1-\|1-x\|} \leq \frac{\|1-x\|}{1/2} < \varepsilon$$

und damit die Stetigkeit der Inversion in 1. □

7.7. Satz. *Sei $(\mathfrak{R}, \|\cdot\|)$ eine Banachalgebra mit Einselement* 1.

(a) *G, G_l und G_r sind offene Teilmengen von $\mathfrak{R}$.*

(b) *Die Inversion $x \mapsto x^{-1}$ ist eine stetige Abbildung von G auf sich.*

Beweis. (a) Sei $x_0 \in G_l$ beliebig. Dann gibt es ein $y \in \mathfrak{R}$ mit $yx_0 = 1$. Für alle $x \in \mathfrak{R}$ mit $\|x - x_0\| < \|y\|^{-1}$ gilt dann

$$\|yx - 1\| = \|y(x - x_0)\| \leq \|y\| \cdot \|x - x_0\| < 1.$$

Nach Lemma 7.6 ist yx daher invertierbar. Mit $u := (yx)^{-1}y$ folgt $ux = 1$. Also ist G_l offen. Analog zeigt man, daß auch G_r offen ist und somit auch $G = G_l \cap G_r$.

(b)Wir müssen zeigen, daß die Abbildung $x \mapsto x^{-1}$ in allen $x_0 \in G$ stetig ist. Sei also $x_0 \in G$ beliebig. Die Abbildung $f : G \to G$ mit $f(x) := x_0^{-1}x$ ist auf G stetig und es ist $f(x_0) = 1$. Die Abbildung $g : G \to G$ mit $g(y) = y^{-1}$ ist nach Lemma 7.6 in $1 = f(x_0)$ stetig. Schließlich ist noch die Abbildung $h : G \to G$ mit $h(u) := ux_0^{-1}$ auf G stetig. Wegen $x^{-1} = (x^{-1}x_0)x_0^{-1} = (x_0^{-1}x)^{-1}x_0^{-1} = h(g(f(x)))$ ist $x \mapsto x^{-1}$ stetig in x_0. □

7.8. Lemma. *Sei $(\mathfrak{R}, \|\cdot\|)$ eine Banachalgebra mit Einselement* 1. *Die Abschließung $\overline{\mathcal{I}}$ eines echten Links- bzw. Rechts- bzw. zweiseitigen Ideals $\mathcal{I}$ in $\mathfrak{R}$ ist wieder ein echtes Links- bzw. Rechts- bzw. zweiseitiges Ideal in $\mathfrak{R}$. Jedes maximale Links- bzw. Rechts- bzw. zweiseitige Ideal in $\mathfrak{R}$ ist abgeschlossen. Insbesondere ist das Radikal rad$(\mathfrak{R})$ nach Satz 0.10 ebenfalls abgeschlossen.*

Beweis. Sei also $\mathcal{I}$ ein echtes Linksideal in $\mathfrak{R}$. Nach Lemma 0.5 gilt dann $\mathcal{I} \subseteq \mathfrak{R} \setminus G_l$. Da G_l nach Satz 7.7 offen ist, folgt $\overline{\mathcal{I}} \subseteq \mathfrak{R} \setminus G_l$. Insbesondere ist $\overline{\mathcal{I}} \neq \mathfrak{R}$. Die Idealeigenschaften für $\overline{\mathcal{I}}$ rechnet man unmittelbar nach. Damit ist $\overline{\mathcal{I}}$ ein echtes Linksideal. Den Beweis für Rechtsideale bzw. zweiseitige Ideale führt man analog. Der Zusatz ist dann klar. □

Sei nun $\mathfrak{R}$ eine Banachalgebra mit Einselement 1 über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen. Für $x \in \mathfrak{R}$ und $z \in \mathbb{C}$ schreiben wir auch $z-x$ statt $z \cdot 1 - x$. Die *Resolventenmenge* von x bezüglich $\mathfrak{R}$ ist definiert als:

$$\rho_{\mathfrak{R}}(x) := \{z \in \mathbb{C}\,;\; z - x \text{ ist in } \mathfrak{R} \text{ invertierbar}\}.$$

Die Komplementärmenge $\sigma_{\mathfrak{R}}(x) := \mathbb{C} \setminus \rho_{\mathfrak{R}}(x)$ heißt das *Spektrum* von x bezüglich $\mathfrak{R}$. Die durch

$$R(z,x) := (z-x)^{-1} \quad \text{für alle } z \in \rho_{\mathfrak{R}}(x)$$

definierte $\mathfrak{R}$–wertige Funktion auf $\rho_{\mathfrak{R}}(x)$ heißt die *Resolvente* von x bezüglich $\mathfrak{R}$.

7.9. Satz. *Sei $\mathfrak{R}$ eine komplexe Banachalgebra mit 1 und sei $x \in \mathfrak{R}$. Dann gilt:*

(a) *Ist $z \in \rho_{\mathfrak{R}}(x)$ und $\delta := \|R(z,x)\|^{-1}$, so ist $U_\delta(z) \subset \rho_{\mathfrak{R}}(x)$ und für alle $w \in \mathbb{C}$ mit $|z-w| < \delta$ hat man*

$$R(w,x) = \sum_{n=0}^{\infty} (z-w)^n R(z,x)^{n+1} \tag{7.3}$$

sowie

$$\|R(w,x) - R(z,x)\| \le |z-w| \frac{\|R(z,x)\|^2}{1 - |z-w| \cdot \|R(z,x)\|}\,. \tag{7.4}$$

Insbesondere ist $\rho_{\mathfrak{R}}(x)$ offen (und damit $\sigma_{\mathfrak{R}}(x)$ abgeschlossen) und die Resolvente ist auf $\rho_{\mathfrak{R}}(x)$ stetig.

(b) *Für alle $z, w \in \rho_{\mathfrak{R}}(x)$ gilt die erste Resolventengleichung*

$$R(z,x) - R(w,x) = (w-z)R(z,x)R(w,x)\,.$$

(c) *Ist auch $y \in \mathfrak{R}$ und $z \in \rho_{\mathfrak{R}}(x) \cap \rho_{\mathfrak{R}}(y)$, so gilt die zweite Resolventengleichung*

$$R(z,x) - R(z,y) = R(z,x)(x-y)R(z,y)\,.$$

(d) *Es ist $\sigma_{\mathfrak{R}}(x) \subseteq \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| \le \|x\|\}$ und für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > \|x\|$ ist*

$$R(z,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} x^n.$$

(e) *Die Resolvente $R(\cdot, x)$ ist auf $\rho_{\mathfrak{R}}(x)$ komplex differenzierbar und es gilt für alle $z \in \rho_{\mathfrak{R}}(x)$:*

$$\lim_{w \to z} \frac{1}{z-w}(R(z,x) - R(w,x)) = -R(z,x)^2.$$

(f) *$\sigma_{\mathfrak{R}}(x)$ ist kompakt und nicht leer.*

(g) *Für alle $z \in \rho_{\mathfrak{R}}(x)$ hat man die Abschätzung: $\|R(z,x)\| \ge \dfrac{1}{\operatorname{dist}(z, \sigma_{\mathfrak{R}}(x))}$.*

Beweis. (a) Sei also $w \in \mathbb{C}$ mit $|z-w| < \|R(z,x)\|^{-1}$. Offensichtlich konvergiert die Reihe auf der rechten Seite von (7.3) wegen $|z-w|\|R(z,x)\| < 1$ absolut und es gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} (z-w)^n R(z,x)^{n+1}(w-x) &= (w-x) \sum_{n=0}^{\infty} (z-w)^n R(z,x)^{n+1} \\
&= [(w-z) + (z-x)] \sum_{n=0}^{\infty} (z-w)^n R(z,x)^{n+1} \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} (z-w)^{n+1} R(z,x)^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} (z-w)^n R(z,x)^n \\
&= 1\,.
\end{aligned}$$

Daher ist $w - x$ invertierbar und es gilt (7.3). Ferner hat man die Abschätzung

$$\begin{aligned}\|R(w,x) - R(z,x)\| &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} (z-w)^n R(z,x)^{n+1} - R(z,x) \right\| \\ &\le \sum_{n=1}^{\infty} |z-w|^n \|R(z,x)\|^{n+1} = \frac{|z-w| \cdot \|R(z,x)\|^2}{1 - |z-w| \cdot \|R(z,x)\|} .\end{aligned}$$

Also gilt (7.4).

(b) Multipliziert man die Gleichung $(w - x) - (z - x) = w - z$ von links mit $R(z, x)$ und von rechts mit $R(w, x)$, so erhält man die Behauptung.

(c) Durch Multiplikation der Gleichung $(z - y) - (z - x) = x - y$ von links mit $R(z, x)$ und von rechts mit $R(z, y)$ folgt (c).

(d) Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > \|x\|$ ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} x^n$ absolut konvergent und es gilt

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} x^n \right) (z - x) = (z - x) \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} x^{n+1} = 1$$

Also ist $R(z, x) = (z - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} x^n$.

(e) Wegen (b) und der Stetigkeit der Resolventenfunktion auf $\rho_{\mathfrak{R}}(x)$ folgt

$$\lim_{w \to z} \frac{1}{z - w} (R(z,x) - R(w,x)) = - \lim_{w \to z} R(z,x) R(w,x) = -R(z,x)^2 .$$

Insbesondere ist dann für alle stetigen linearen Funtionale $f : \mathfrak{R} \to \mathbb{C}$ die komplexwertige Funktion $f \circ R(\cdot, x) : z \mapsto f(R(z, x))$ auf der nach (a) offenen Menge $\rho_{\mathfrak{R}}(x)$ komplex differenzierbar und damit holomorph.

(f) Wegen (a) und (d) ist $\sigma_{\mathfrak{R}}(x)$ kompakt.

Annahme: $\sigma_{\mathfrak{R}}(x)$ ist leer. Dann ist für alle stetigen, linearen Funktionale $f : \mathfrak{R} \to \mathbb{C}$ die Funktion $f \circ R(\cdot, x) : z \mapsto f(R(z, x))$ eine ganze Funktion. Für $|z| > \|x\|$ folgt nach (d):

$$|f(R(z,x))| \le \|f\| \cdot \|R(z,x)\| \le \|f\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|x\|^n}{|z|^{n+1}} = \frac{\|f\|}{|z| - \|x\|} \to 0 \quad \text{für } |z| \to \infty .$$

Nach dem Satz von Liouville ist daher $f \circ R(\cdot, x) \equiv 0$ für alle stetigen Linearformen f auf $\mathfrak{R}$. Nach der Folgerung 6.7(b) aus dem Satz von Hahn–Banach (mit $E = \mathfrak{R}$ und $F = \{0\}$) folgt hieraus $R(z, x) \equiv 0$ im Widerspruch zu $(z - x)R(z, x) \equiv 1 \neq 0$. Also führte die Annahme zu einem Widerspruch. $\sigma_{\mathfrak{R}}(x)$ ist daher nicht leer.

(g) Nach (a) enthält $\rho_{\mathfrak{R}}(x)$ mit z auch die offene Kreisscheibe um z mit dem Radius $\|R(z, x)\|^{-1}$. Daher folgt $\operatorname{dist}(z, \sigma_{\mathfrak{R}}(x)) \ge \|R(z, x)\|^{-1}$ und hieraus (g). □

7.10. Satz (von Mazur und Gelfand). *Ist $\mathfrak{R}$ eine komplexe Banachalgebra mit Einselement 1 und $\|1\| = 1$, in der jedes von 0 verschiedene Element invertierbar ist, so ist $\mathfrak{R}$ schon isometrisch isomorph zu $\mathbb{C}$.*

Beweis. Sei $x \in \mathfrak{R}$ beliebig. Nach Voraussetzung ist $z \cdot 1 - x$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z \cdot 1 - x \neq 0$ invertierbar. Wegen $\sigma_{\mathfrak{R}}(x) \neq \emptyset$ (nach Satz 7.9 (f)) gibt es ein $z_x \in \sigma_{\mathfrak{R}}(x)$. Für dieses muß $z_x \cdot 1 - x = 0$ und damit $x = z_x \cdot 1$ gelten. z_x ist hierdurch eindeutig bestimmt. Es folgt $\mathfrak{R} = \mathbb{C} \cdot 1$ und die Abbildung $z \mapsto z \cdot 1$ ist ein isometrischer Algebrenisomorphismus von $\mathbb{C}$ auf $\mathfrak{R}$. □

Übungsaufgaben zu Kapitel 7.

7.1. Aufgabe. Zeigen Sie: Der Banachraum $\ell^1(\mathbb{Z})$ ist vermöge

$$[(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} * (y_n)_{n\in\mathbb{Z}}]_k := \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n y_{k-n} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

eine kommutative Banachalgebra mit Eins.

7.2. Aufgabe. (a) Sei $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ eine Banachalgebra und $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ ein abgeschlossenes zweiseitiges Ideal in $\mathcal{A}$. Zeigen Sie: $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ ist, versehen mit der Quotientennorm $\|x + \mathcal{I}\| := \inf_{y\in\mathcal{I}} \|x + y\|_{\mathcal{A}}$, eine Banachalgebra.
(b) Zeigen Sie: Die Vervollständigung einer normierten Algebra $\mathcal{A}$ ist eine Banachalgebra, die $\mathcal{A}$ als Unteralgebra enthält.

7.3. Aufgabe. Sei $\mathcal{A}$ eine $\mathbb{K}$-Algebra und sei $\mathcal{I} \subsetneqq \mathcal{A}$ ein zweiseitiges Ideal in $\mathcal{A}$. Zeigen Sie: Genau dann ist $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ eine Algebra mit Einselement, in der jedes von Null verschiedene Element invertierbar ist, wenn $\mathcal{I}$ sowohl maximales modulares Linksideal als auch maximales modulares Rechtsideal ist.

7.4. Aufgabe. Untersuchen Sie in den folgenden Fällen, ob die Unterräume $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$ und $\mathcal{K}$ der kommutativen Banachalgebra $\mathcal{R}$ abgeschlossene, maximale oder modulare Ideale sind.
(a) $\mathcal{R} = C_0(\mathbb{R}) = \{f \in C(\mathbb{R}) \,|\, f(t) \to 0 \text{ bei } t \to \infty\}$, versehen mit der sup-Norm,

$$\mathcal{I} := \{f \in C_0(\mathbb{R}) \,|\, f(2008) = 0\},$$
$$\mathcal{J} := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \,|\, \mathrm{supp} f \text{ ist kompakt}\},$$
$$\mathcal{K} := \{f \in C_0(\mathbb{R}) \,|\, \exists n_f\, \forall n \geq n_f : \ f(n) = 0\}.$$

(b) $\mathcal{R} = C_b(\mathbb{R}) := \{f \in C(\mathbb{R}) \,|\, \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)| < \infty\}$, versehen mit der Supremumsnorm,

$$\mathcal{I} := \{f \in C_b(\mathbb{R}) \,|\, \lim_{x\to\infty} f(x) = 0\}.$$

7.5. Aufgabe. (a) Zeigen Sie: Der Banachraum $L^1[0,1]$ ist mit der Multiplikation

$$(f * g)(x) := \int_0^x f(y) g(x-y)\, dy, \qquad x \in [0,1]$$

eine kommutative Banachalgebra.
(b) Sei $0 < \alpha < 1$. Zeigen Sie, daß

$$\mathcal{I}_\alpha := \{f \in L^1[0,1]\,;\, f|_{[0,\alpha]} \equiv 0 \text{ fast überall }\}$$

ein abgeschlossenes Ideal in $L^1[0,1]$ ist, welches aus nilpotenten Elementen besteht.

7.6. Aufgabe. Es sei X ein Banachraum. Mit $\mathcal{F}(X)$ bezeichnen wir die Menge aller Operatoren aus $\mathcal{L}(X)$ deren Bild von endlicher Dimension ist. Zeigen Sie:
(a) $\mathcal{F}(X)$ ist ein zweiseitiges Ideal in $\mathcal{L}(X)$.
(b) Ist $\{0\} \neq \mathcal{I} \subset \mathcal{L}(X)$ ein zweiseitiges Ideal, so gilt $\mathcal{F}(X) \subset \mathcal{I}$.
(c) $\mathcal{L}(X)$ ist einfach genau dann, wenn $\dim X < \infty$.

7.7. Aufgabe. Die *Diskalgebra* ist definiert als

$$A(\mathbb{D}) := \{f \in C(\overline{\mathbb{D}}) \ : \ f|_{\mathbb{D}} \text{ ist holomorph}\}.$$

(a) Zeigen Sie, daß durch

$$\|f\|_{A(\mathbb{D})} := \sup\{|f(z)| \ : \ z \in \mathbb{T}\}$$

eine Norm auf $A(\mathbb{D})$ gegeben ist und daß $A(\mathbb{D})$ damit eine Banachalgebra wird.

(b) Sei für $\varepsilon \in [0,1]$

$$R_{\varepsilon,1}(0) := \{z \in \mathbb{C} : \varepsilon \leq |z| \leq 1\}.$$

Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$R_\varepsilon : A(\mathbb{D}) \to C(R_{\varepsilon,1}(0)) =: C_\varepsilon, \quad f \mapsto f|_{R_{\varepsilon,1}(0)}$$

eine isometrische Einbettung ist.

(c) Berechnen Sie $\sigma_{A(\mathbb{D})}(\mathrm{id})$ und $\sigma_{C_\varepsilon}(\mathrm{id})$.

KAPITEL 8

Der Spektralradius

Falls nicht anders vermerkt sei $(\mathfrak{R}, \|\cdot\|)$ in diesem Kapitel stets eine normierte Algebra über dem Körper $\mathbb{K}$ der reellen oder komplexen Zahlen. Für $x \in \mathfrak{R}$ heißt

$$r(x) := \inf_{n \in \mathbb{N}} \|x^n\|^{1/n}$$

der *Spektralradius* von x bezüglich $(\mathfrak{R}, \|\cdot\|)$.

8.1. Satz. *Für alle $x \in \mathfrak{R}$ gilt:*
(a) $r(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n}$.
(b) $r(x) \leq \|x\|$.
(c) $\forall \alpha \in \mathbb{K}: \quad r(\alpha x) = |\alpha| r(x)$.
(d) $\forall k \in \mathbb{N}: \quad r(x^k) = r(x)^k$.

Beweis. (a) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und sei $k \in \mathbb{N}$ mit $\|x^k\|^{1/k} < r(x) + \varepsilon$. Jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ hat dann eine eindeutige Darstellung der Form

$$n = p(n)k + q(n) \quad \text{mit } p(n), q(n) \in \mathbb{N}_0, q(n) < k.$$

Für $n \to \infty$ folgt

$$\frac{q(n)}{n} \to 0, \quad \frac{p(n)k}{n} \to 1 \text{ und damit } \frac{p(n)}{n} \to \frac{1}{k}\,.$$

Hiermit erhält man wegen der Submultiplikativität der Norm für $n \to \infty$:

$$\begin{aligned} r(x) \leq \|x^n\|^{1/n} =& \|x^{p(n)k+q(n)}\|^{1/n} \leq \|x^{p(n)k}\|^{1/n} \cdot \|x^{q(n)}\|^{1/n} \leq \\ \leq& \|x^k\|^{p(n)/n} \cdot \|x\|^{q(n)/n} \to \|x^k\|^{1/k} < r(x) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Es gibt also ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq n_0$ gilt: $r(x) \leq \|x^n\|^{1/n} < r(x) + \varepsilon$. Damit folgt die Behauptung.
(b) ist klar nach Definition von $r(x)$.
(c) Nach (a) hat man $r(\alpha x) = \lim_{n\to\infty} \|(\alpha x)^n\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} |\alpha| \cdot \|x^n\|^{1/n} = |\alpha| r(x)$.
(d) Nach (a) gilt: $r(x^k) = \lim_{n\to\infty} \|x^{kn}\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left(\|x^{kn}\|^{1/kn}\right)^k = r(x)^k$. □

Das folgende Lemma beschreibt, wann für eine normierte Algebra $\mathfrak{R}$ in Satz 8.1 (b) stets das Gleichheitszeichen steht.

8.2. Lemma. *Für eine normierte Algebra $\mathfrak{R}$ sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:*
(a) $\forall x \in \mathfrak{R}: \quad r(x) = \|x\|$.
(b) $\forall x \in \mathfrak{R}: \quad \|x^2\| = \|x\|^2$.

Beweis. Ist (a) erfüllt, so folgt nach Satz 8.1 (d) für alle $x \in \mathfrak{R}$:

$$\|x^2\| = r(x^2) = r(x)^2 = \|x\|^2.$$

Gilt (b), so folgt durch vollständige Induktion für alle $x \in \mathfrak{R}, n \in \mathbb{N}$: $\|x^{2^n}\| = \|x\|^{2^n}$ und damit $r(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \|x^{2^n}\|^{2^{-n}} = \lim_{n\to\infty} \|x\| = \|x\|$. □

Sei z.B. $\mathfrak{R} := C(K)$ die Algebra der stetigen $\mathbb{K}$–wertigen Funktionen auf einem kompakten Hausdorffraum, versehen mit der sup-Norm $\|\cdot\|_K$. Dann gilt für alle $f \in \mathfrak{R}$: $\|f^2\|_K = \|f\|_K^2$ und somit $r(f) = \|f\|_K$.

Bezeichnung. Mit $\mathrm{EN}(\mathfrak{R})$ bezeichnen wir die Menge aller zur Ausgangsnorm $\|\cdot\|$ äquivalenten submultiplikativen Normen auf $\mathfrak{R}$. Besitzt $\mathfrak{R}$ ein Einselement 1, so sei

$$\mathrm{EUN}(\mathfrak{R}) := \{p \in \mathrm{EN}(\mathfrak{R})\,;\, p(1) = 1\}\,.$$

8.3. Lemma. $\forall p \in \mathrm{EN}(\mathfrak{R})\, \forall x \in \mathfrak{R}: \quad r(x) = \lim\limits_{n\to\infty} p(x^n)^{1/n}$. *Der Spektralradius ist also für alle zur Ausgangsnorm $\|\cdot\|$ äquivalenten Algebranormen auf $\mathfrak{R}$ derselbe.*

Beweis. Da p und $\|\cdot\|$ äquivalente Normen sind, gibt es Konstanten $c > 0, C > 0$ mit

$$\forall u \in \mathfrak{R}: \quad c\|u\| \le p(u) \le C\|u\|\,.$$

Damit folgt für alle $x \in \mathfrak{R}$ und $n \in \mathbb{N}$

$$c^{1/n}\|x^n\|^{1/n} \le p(x^n)^{1/n} \le C^{1/n}\|x^n\|^{1/n}.$$

Für $n \to \infty$ erhalten wir nach Satz 8.1 (a) die Behauptung. □

8.4. Satz. *Sei $(\mathfrak{R}, \|\cdot\|)$ eine normierte $\mathbb{K}$–Algebra und sei $\mathcal{S}$ eine beschränkte Halbgruppe bezüglich der Multiplikation von $\mathfrak{R}$. Dann gibt es eine Norm $p \in \mathrm{EN}(\mathfrak{R})$ mit*

$$\forall s \in \mathcal{S}: \quad p(s) \le 1\,.$$

Besitzt $\mathfrak{R}$ ein Einselement 1, so ist $p \in \mathrm{EUN}(\mathfrak{R})$ wählbar.

Beweis. Ist $(\mathfrak{R}, \|\cdot\|)$ nicht vollständig, so betrachte man einfach die Vervollständigung $\widehat{\mathfrak{R}}$ von $\mathfrak{R}$ (vergl. Aufgabe 1.9). Diese ist, wie in Aufgabe 7.2 gezeigt wird, eine Banachalgebra und $\mathcal{S}$ ist natürlich auch in $\widehat{\mathfrak{R}}$ eine beschränkte Halbgruppe. Sei also nun $\mathfrak{R}$ eine Banachalgebra.

Hat $\mathfrak{R}$ ein Einselement 1, so ist mit $\mathcal{S}$ auch $\mathcal{S}_1 := \{1\} \cup \mathcal{S}$ eine beschränkte multiplikative Halbgruppe in $\mathfrak{R}$. In diesem Fall setzen wir $\mathfrak{R}_1 := \mathfrak{R}$.

Besitzt $\mathfrak{R}$ kein Einselement, so betrachten wir $\mathfrak{R}_1 := \mathfrak{R} \oplus \mathbb{K}\cdot 1$ mit der wieder mit $\|\cdot\|$ bezeichneten, die Ausgangsnorm fortsetzenden Norm, die definiert ist durch

$$\|x + \alpha\cdot 1\| := \|x\| + |\alpha| \quad \text{für alle } x \in \mathfrak{R}, \alpha \in \mathbb{K}\,,$$

wobei $\|x\|$ die Norm von x in $\mathfrak{R}$ sei. Damit wird $\mathfrak{R}_1$ zu einer Banachalgebra mit dem Einselement 1 und die kanonische Einbettung von $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{R}_1$ ist eine Isometrie. Mit $\mathcal{S}$ ist auch $\mathcal{S}_1 := \{1\} \cup \mathcal{S}$ eine beschränkte multiplikative Halbgruppe in $\mathfrak{R}_1$.

Wir können nun beide Fälle gemeinsam weiter behandeln. Da $\mathcal{S}_1$ beschränkt ist, gibt es eine Konstante $C > 0$ mit $\|s\| \le C$ für alle $s \in \mathcal{S}_1$. Wir definieren für alle $a \in \mathfrak{R}_1$:

$$q(a) := \sup_{s\in\mathcal{S}_1} \|sa\| \le C\|a\|\,.$$

Offensichtlich ist q eine Halbnorm auf $\mathfrak{R}_1$. Wegen $1 \in \mathcal{S}_1$ auch $\|a\| \le q(a)$ für alle $a \in \mathfrak{R}_1$. Daher ist q eine zu $\|\cdot\|$ äquivalente Norm auf $\mathfrak{R}_1$. Wir setzen nun für alle $a \in \mathfrak{R}_1$

$$p(a) := \sup\{q(ax)\,;\, x \in \mathfrak{R}_1, q(x) \le 1\}\,.$$

Nach Satz 7.2 ist p eine zu q äquivalente Algebranorm auf $\mathfrak{R}_1$ mit $p(1) = 1$. Insbesondere ist $p \in \mathrm{EUN}(\mathfrak{R}_1)$ und $p|_{\mathfrak{R}} \in \mathrm{EN}(\mathfrak{R})$. Für alle $t \in \mathcal{S}_1, x \in \mathfrak{R}_1$ mit $q(x) \le 1$ gilt

$$q(tx) = \sup_{s\in\mathcal{S}_1} \|stx\| \le q(x) \le 1$$

und damit nach Definition von p: $p(t) \le 1$. □

8.5. Folgerung. *Sei $(\mathfrak{R}, \|\cdot\|)$ eine normierte $\mathbb{K}$–Algebra.*

(a) $r(x) = \inf\{p(x)\,;\, p \in \mathrm{EN}(\mathfrak{R})\}$.
(b) *Besitzt* $\mathfrak{R}$ *ein Einselement* 1, *so ist* $r(x) = \inf\{p(x)\,;\, p \in \mathrm{EUN}(\mathfrak{R})\}$.

Beweis. (i) Nach Satz 8.1 (b) und Lemma 8.3 ist $r(x) \leq p(x)$ für alle $x \in \mathfrak{R}, p \in \mathrm{EN}(\mathfrak{R})$.

(ii) Sei nun $x \in \mathfrak{R}$ beliebig mit $r(x) < 1$. Dann ist $\{x^n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$ eine beschränkte multiplikative Unterhalbgruppe von $\mathfrak{R}$. Nach Satz 8.4 gibt es eine Norm $p \in \mathrm{EN}(\mathfrak{R})$ (bzw. $p \in \mathrm{EUN}(\mathfrak{R})$) mit $p(x^n) \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere ist also $p(x) \leq 1$.

Sei nun $y \in \mathfrak{R}$ beliebig und $\varepsilon > 0$ beliebig. Nach Satz 8.1 (c) ist $r(\frac{1}{r(y)+\varepsilon}y) = \frac{r(y)}{r(y)+\varepsilon} < 1$. Wie eben gezeigt, gibt es also ein Norm $p \in \mathrm{EN}(\mathfrak{R})$ (bzw. $p \in \mathrm{EUN}(\mathfrak{R})$) mit $p(\frac{1}{r(y)+\varepsilon}y) \leq 1$, also mit $p(y) \leq r(y) + \varepsilon$.

Aus (i) und (ii) folgen nun die Behauptungen. □

8.6. Folgerung. *Sei* $(\mathfrak{R}, \|\cdot\|)$ *eine normierte* $\mathbb{K}$*–Algebra und seien* $a, b \in \mathfrak{R}$ *mit* $ab = ba$. *Dann gilt:*
(a) $r(ab) \leq r(a)r(b)$.
(b) $r(a+b) \leq r(a) + r(b)$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir setzen
$$u := \frac{1}{r(a)+\varepsilon}a \quad \text{und} \quad v := \frac{1}{r(b)+\varepsilon}b.$$
Nach Satz 8.1 (c) ist $r(u) < 1$ und $r(v) < 1$. Also sind wie oben $\{u^n; n \in \mathbb{N}\}$ und $\{v^n; n \in \mathbb{N}\}$ beschränkte multiplikative Halbgruppen in $\mathfrak{R}$. Da u und v kommutieren, ist auch
$$\{u^n; n \in \mathbb{N}\} \cup \{v^n; n \in \mathbb{N}\} \cup \{u^n v^m; n, m \in \mathbb{N}\}$$
eine beschränkte multiplikative Halbgruppe in $\mathfrak{R}$. Nach Satz 8.4 gibt es also eine Norm $p \in \mathrm{EN}(\mathfrak{R})$ (bzw. $p \in \mathrm{EUN}(\mathfrak{R})$) mit $p(u) \leq 1$ und $p(v) \leq 1$. Es folgt $p(a) \leq r(a) + \varepsilon$ und $p(b) \leq r(b) + \varepsilon$ sowie
$$\begin{aligned} r(ab) &\leq p(ab) \leq p(a)p(b) \leq r(a)r(b) + \varepsilon(r(a) + r(b)) + \varepsilon^2 \\ r(a+b) &\leq p(a+b) \leq p(a) + p(b) \leq r(a) + r(b) + 2\varepsilon\,. \end{aligned}$$
Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgen die Behauptungen. □

Die Voraussetzung $ab = ba$ in Folgerung 8.6 kann nicht weggelassen werden. Dies zeigt das folgende einfache Beispiel:

8.7. Beispiel. Sei $\mathfrak{R} := M_{2\times 2}(\mathbb{K})$ die Algebra der 2×2 Matrizen, versehen mit einer Algebranorm $\|\cdot\|$. Mit
$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
gilt $A^2 = B^2 = 0$ und daher $r(A) = r(B) = 0$. Ferner
$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (AB)^n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\,.$$
Damit folgt
$$r(AB) = \lim_{n\to\infty} \left\| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\|^{1/n} = 1 \quad \text{aber} \quad r(A)r(B) = 0.$$
Weiter gilt
$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und } \forall n \in \mathbb{N} \quad (A+B)^{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und daher

$$r(A+B) = \lim_{n\to\infty} \left\| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\|^{1/2n} = 1 > 0 = r(A) + r(B).$$

8.8. Folgerung. *Sei $(\mathfrak{R}, \|\cdot\|)$ eine Banachalgebra mit Einselement* 1. *Dann gilt für alle $x \in \mathfrak{R}$:*

$$r(x) < 1 \quad \Longrightarrow \quad 1 - x \text{ ist in } \mathfrak{R} \text{ invertierbar.}$$

Beweis. Nach Folgerung 8.5 gibt es eine zu $\|\cdot\|$ äquivalente Algebranorm $p \in \mathrm{EUN}(\mathfrak{R})$ mit $p(x) < 1$. Es folgt $p(1-(1-x)) = p(x) < 1$. Nach Satz 7.9 (angewendet auf $(\mathfrak{R}, p)$) ist also $1-x$ invertierbar und es gilt $(1-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$. □

8.9. Folgerung. *Sei $\mathfrak{R}$ eine komplexe Banachalgebra mit Einselement* 1 *und sei $x \in \mathfrak{R}$.*

(a) *Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > r(x)$ ist $z - x$ in $\mathfrak{R}$ invertierbar und es gilt*

$$(z-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} x^n.$$

(b) $\sigma_{\mathfrak{R}}(x) \subseteq \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| \le r(x)\}$.

(c) *Gibt es eine gegen x konvergente Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ von invertierbaren Elementen, für die $(r(x_n^{-1}))_{n=1}^{\infty}$ beschränkt ist, und gilt $xx_n = x_n x$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist auch x invertierbar in $\mathfrak{R}$.*

Beweis. (a) Es ist $r(\frac{1}{z}x) = \frac{1}{|z|} r(x) < 1$. Nach Folgerung 8.8 ist $1 - \frac{1}{z}x$ invertierbar in $\mathfrak{R}$ und es gilt:

$$(1 - \frac{1}{z}x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} x^n.$$

Es folgt

$$(z-x)\frac{1}{z}(1-\frac{1}{z}x)^{-1} = 1 = \frac{1}{z}(1-\frac{1}{z}x)^{-1}(z-x)\,.$$

Also ist $z - x$ in $\mathfrak{R}$ invertierbar und

$$(z-x)^{-1} = \frac{1}{z}(1-\frac{1}{z}x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} x^n.$$

(b) folgt unmittelbar aus (a).

(c) Es ist $1 - x_n^{-1}x = x_n^{-1}(x_n - x)$ und daher wegen der Beschränktheit von $(r(x_n^{-1}))_{n=1}^{\infty}$ nach Folgerung 8.6

$$r(1 - x_n^{-1}x) \le r(x_n^{-1}) r(x_n - x) \le r(x_n^{-1}) \|x_n - x\| \to 0 \text{ für } n \to \infty\,.$$

Hierbei ist Folgerung 8.6 anwendbar, da x_n mit x und damit auch x_n^{-1} mit $x_n - x$ vertauscht. Für $n \ge n_0$ gilt also $r(1 - x_n^{-1}x) < 1$. Nach Folgerung 8.8 ist $x_n^{-1}x$ invertierbar und wegen $xx_n^{-1} = x_n^{-1}x$ ist $(x_n^{-1}x)^{-1}x_n^{-1}x = 1 = x_n^{-1}x(x_n^{-1}x)^{-1} = x\,(x_n^{-1}(x_n^{-1}x)^{-1})$. Also ist x in $\mathfrak{R}$ invertierbar. □

Die Begründung für die Bezeichnung Spektralradius wird durch den folgenden Satz gegeben.

8.10. Satz. *Sei $\mathfrak{R}$ eine komplexe Banachalgebra mit Einselement* 1. *Dann gilt für alle $x \in \mathfrak{R}$:*

$$r(x) = \max\{|z|\,;\, z \in \sigma_{\mathfrak{R}}(x)\}\,.$$

Beweis. Nach Folgerung 8.9 ist $r_1(x) := \max\{|z|\,;\, z \in \sigma_{\mathfrak{R}}(x)\} \le r(x)$.

Seien nun $r > r_1(x)$ und $f \in \mathfrak{R}'$ beliebig vorgegeben. Da $R(\cdot, x)$ nach Satz 7.9 auf $\rho_{\mathfrak{R}}(x)$ also auch auf $\Omega := \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| > r_1(x)\}$ komplex differenzierbar ist, ist die Funktion $z \mapsto f(R(z,x))$ auf Ω in eine Laurentreihe entwickelbar. Für $|z| > \|x\|$ gilt nach Satz 7.9

$$f(R(z,x)) = f\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1}x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} f(x^n)\,.$$

Wegen der Eindeutigkeit der Koeffizienten der Laurententwicklung gilt diese Darstellung auf ganz Ω mit absoluter Konvergenz der Reihe. Insbesondere ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^{-n-1}|f(x^n)| < \infty\,.$$

Daher ist für alle $f \in \mathfrak{R}'$ die Folge $(r^{-n-1}f(x^n))_{n=0}^{\infty}$ und somit auch $(r^{-n}f(x^n))_{n=0}^{\infty}$ beschränkt in $\mathbb{C}$. Nach dem Satz von Banach–Steinhaus ist mit $(i(a))(f) := f(a)$ für alle $a \in \mathfrak{R}$ also die Folge $(i(r^{-n}x^n))_{n=0}^{\infty}$ beschränkt im Bidual $\mathfrak{R}''$ beschränkt. Da $i : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}''$ nach Aufgabe 6.3 eine Isometrie ist, ist $(r^{-n}x^n)_{n=0}^{\infty}$ beschränkt in $\mathfrak{R}$. Es gibt also ein $M > 0$ mit $\|r^{-n}x^n\| \le M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es folgt also

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad \|x^n\|^{1/n} \le M^{1/n} r$$

und hieraus für $n \to \infty$: $r(x) \le r$. Da $r > r_1(x)$ beliebig war muß $r(x) \le r_1(x)$ gelten. $\square$

8.11. Folgerung. *Sei* $\mathfrak{R}$ *eine komplexe Banachalgebra mit Einselement* 1. *Für* $x \in \mathfrak{R}$ *sind die folgenden drei Aussagen äquivalent:*

(a) $\lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} = 0$, *d.h.* x *ist quasinilpotent.*
(b) $r(x) = 0$.
(c) $\sigma_{\mathfrak{R}}(x) = \{0\}$.

Hierbei gilt die Äquivalenz von (a) und (b) nach Satz 8.1 und die von (b) und (c) nach Satz 8.10.

8.12. Folgerung. *Sei* $\mathfrak{R}$ *eine kommutative, komplexe Banachalgebra mit Einselement* 1. *Dann gilt*

$$\operatorname{rad}(\mathfrak{R}) = \{x \in \mathfrak{R}\,;\, r(x) = 0\}.$$

Beweis. Ist $x \in \mathfrak{R}$ mit $r(x) = 0$, so gilt nach Folgerung 8.6 für alle $y \in \mathfrak{R}$

$$0 \le r(xy) \le r(x)r(y) = 0.$$

Nach Folgerung 8.8 ist $1 - xy$ also für alle $y \in \mathfrak{R}$ invertierbar. Nach Definition 0.56 und Satz 0.57 aus den Grundlagen aus der Algebrentheorie ist also $x \in \operatorname{rad}(\mathfrak{R})$.

Sei nun $x \in \operatorname{rad}(\mathfrak{R})$ und sei $0 \ne z \in \mathbb{C}$. Dann existiert nach Definition des Radikals $(1 - (\frac{1}{z}\cdot 1)x)^{-1}$ in $\mathfrak{R}$. Daher ist $z - x$ in $\mathfrak{R}$ invertierbar ist mit $(z-x)^{-1} = \frac{1}{z}(1 - (\frac{1}{z}\cdot 1)x)^{-1}$. Also gilt $z \in \rho_{\mathfrak{R}}(x)$ für alle $0 \ne z \in \mathbb{C}$ und somit $\sigma_{\mathfrak{R}}(x) \subseteq \{0\}$. Nach Satz 7.9 (f) ist also $\sigma_{\mathfrak{R}}(x) = \{0\}$ und somit (nach Folgerung 8.11) $r(x) = 0$. $\square$

Übungsaufgaben zu Kapitel 8.

8.1. Aufgabe. Sei $\mathcal{R}$ eine Banachalgebra mit Einselement 1 und sei $\mathcal{A}$ eine abgeschlossene Unteralgebra von $\mathcal{R}$ mit $1 \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie, daß für alle $x \in \mathcal{A}$ gilt:

(a) $\sigma_{\mathcal{R}}(x) \subset \sigma_{\mathcal{A}}(x)$.
(b) $\partial\sigma_{\mathcal{A}}(x) \subset \partial\sigma_{\mathcal{R}}(x)$.
(c) Ist $\sigma_{\mathcal{R}}(x) \subset \mathbb{R}$, so ist $\sigma_{\mathcal{R}}(x) = \sigma_{\mathcal{A}}(x)$.

(d) Ist $\mathcal{A}$ eine maximale kommutative Unteralgebra von $\mathcal{R}$, so ist $\sigma_{\mathcal{R}}(x) = \sigma_{\mathcal{A}}(x)$.
(e) Belegen Sie durch ein Beispiel, daß der Fall $\sigma_{\mathcal{R}}(x) \neq \sigma_{\mathcal{A}}(x)$ auftreten kann.

8.2. Aufgabe. Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra mit Einselement über $\mathbb{C}$ und seien $a, b \in \mathcal{A}$.
(a) Zeigen Sie: $\sigma(ab) \setminus \{0\} = \sigma(ba) \setminus \{0\}$ und $r(ab) = r(ba)$.
(b) Belegen Sie durch ein Beispiel, daß der Fall $\sigma_{\mathcal{A}}(ab) \neq \sigma_{\mathcal{A}}(ba)$ auftreten kann.
(c) Sei E ein Banachraum über $\mathbb{C}$ mit $\dim E = N < \infty$. Zeigen Sie, daß in diesem Fall für alle $A, B \in \mathcal{L}(E)$ gilt $\sigma_{\mathcal{L}(E)}(AB) = \sigma_{\mathcal{L}(E)}(BA)$.

KAPITEL 9

Kompakte Operatoren

9.1. Definition. Seien E, F zwei normierte $\mathbb{K}$–Vektorräume. Ein linearer Operator $T : E \to F$ heißt *kompakt*, falls er jede beschränkte Teilmenge von E auf eine relativkompakte Teilmenge von F abbildet.

Die Menge der kompakten linearen Operatoren von E nach F bezeichnen wir mit $\mathcal{K}(E, F)$.

9.2. Lemma. *Sei $T : E \to F$ ein linearer Operator zwischen zwei normierten $\mathbb{K}$–Vektorräumen.*

(a) *Ist T kompakt, so ist T schon stetig.*

(b) *Für T sind äquivalent:*

  (i) *T ist ein kompakter Operator.*

  (ii) *Für jede beschränkte Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ in E besitzt die Bildfolge $(Tx_n)_{n=1}^{\infty}$ eine in F konvergente Teilfolge.*

  (iii) *$T(B_E)$ ist relativ kompakt in F (mit $B_E := \{x \in E\,;\, \|x\| \le 1\}$).*

Beweis. (a) Nach Voraussetzung ist $T(B_E)$ relativkompakt in F also auch normbeschränkt in F. Insbesondere ist $\sup\{\|Tx\|_F\,;\, x \in E, \|x\|_E \le 1\} < \infty$ und daher T stetig.

(b) Die Implikation (i) $\Longrightarrow$ (iii) ist unmittelbar klar.

Ist (iii) erfüllt und ist $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ eine beschränkte Folge in E, so gibt es ein $r > 0$ mit $x_n \subset rB_E$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit $T(B_E)$ ist auch $rT(B_E) = T(rB_E)$ relativkompakt in F. Jede Folge aus $rT(B_E)$ und damit insbesondere auch die Bildfolge $(Tx_n)_{n=1}^{\infty}$ besitzt also eine in F konvergente Teilfolge.

Sei nun (ii) erfüllt und sei $B \subset E$ eine beliebige beschränkte Teilmenge von E. Ist $(Tx_n))_{n=1}^{\infty}$ eine beliebige Folge aus $T(B)$ (mit $x_n \in B$ für alle $n \in \mathbb{N}$), so besitzt diese nach Voraussetzung eine beschränkte Teilfolge. $T(B)$ ist also relativ kompakt in F. $\square$

9.3. Bemerkungen. (a) Jeder stetige lineare Operator mit endlich dimensionalem Bild ist kompakt.

(b) Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann ist die Identität $1_E : E \to E$ genau dann kompakt, wenn E endlich dimensional ist.

(c)Ist $0 \ne \lambda \in \mathbb{K}$ und ist $T \in \mathcal{L}(E)$ ein kompakter linearer Operator auf dem normierten $\mathbb{K}$–Vektorraum $(E, \|\cdot\|)$, so ist $\dim \ker(\lambda - T) < \infty$.

Beweis. (a) Ist $T : E \to F$ ein stetiger linearer Operator zwischen zwei normierten Räumen, so ist das Bild $T(B_E)$ der Einheitskugel B_E von E beschränkt in $(F, \|\cdot\|_F)$ und damit auch in $(\operatorname{ran} T, \|\cdot\|_F|_{\operatorname{ran} T})$. Ist also $\dim \operatorname{ran} T < \infty$, so ist $T(B_E)$ als beschränkte Teilmenge eines endlich dimensionalen Raumes relativkompakt in $(\operatorname{ran} T, \|\cdot\|_E|_{\operatorname{ran} T})$ und damit auch in $(F, \|\cdot\|_F)$.

(b) Nach Lemma 9.2 (b) ist 1_E genau dann ein kompakter Operator, wenn $1_E(B_E) = B_E$ kompakt in E ist. Nach Folgerung 1.19 ist dies äquivalent zu $\dim E < \infty$.

(c) Da T ein kompakter Operator ist, und wegen $T|_{\ker(\lambda - T)} = \lambda \mathrm{id}_{\ker(\lambda - T)}$ gilt für die abgeschlossene Einheitskugel B von $\ker(\lambda - T)$: $B = \frac{1}{\lambda} T(\lambda B)$ ist relativkompakt. Nach Folgerung 1.16 ist $\ker(\lambda - T)$ von endlicher Dimension. $\square$

Ist $T : E \to E$ eine lineare Abbildung von einem $\mathbb{K}$–Vektorraum E in sich, so heißt ein Punkt $\mu \in \mathbb{K}$ bekanntlich *Eigenwert* von T, falls es ein $0 \neq x \in E$ gibt mit $Tx = \mu x$. Der Vektor x heißt dann *Eigenvektor* zum Eigenwert μ und $\ker(\mu - T)$ der zu μ gehörige *Eigenraum*. Teil (c) der vorstehenden Bemerkungen besagt also, daß die Eigenräume zu von 0 verschiedenen Eigenwerten kompakter Operatoren von endlicher Dimension sind.

Eine Teilmenge K eines metrischen Raums (X, d) heißt *präkompakt*, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele $x_1, \ldots, x_n \in K$ gibt mit $K \subseteq U_\varepsilon(x_1) \cup \cdots \cup U_\varepsilon(x_n)$. $\{x_1, \ldots, x_n\}$ heißt dann ein *endliches ε–Netz für K*. Relativkompakte Teilmengen von X sind präkompakt in (X, d). Ist (X, d) vollständig, so ist auch jede präkompakte Teilmenge von X schon relativkompakt (siehe z.B. [**14**], p. 61 f.).

9.4. Lemma. *E, F, G, H seien normierte $\mathbb{K}$–Vektorräume.*

(a) *Ist $K \in \mathcal{K}(E, F)$, so sind für alle $S \in \mathcal{L}(H, E), T \in \mathcal{L}(F, G)$ auch die Operatoren $TK : E \to G$ und $KS : H \to F$ kompakt.*
(b) *$\mathcal{K}(E, F)$ ist Untervektorraum von $\mathcal{L}(E, F)$.*
(c) *$\mathcal{K}(E)$ ist ein zweiseitiges Ideal in $\mathcal{L}(E)$.*
(d) *Ist F vollständig, so ist $\mathcal{K}(E, F)$ ein bezüglich der Operatornorm abgeschlossener Untervektorraum des Banachraums $\mathcal{L}(E, F)$.*

Beweis. (a) Seien $(h_n)_{n=1}^\infty$ bzw. $(e_n)_{n=1}^\infty$ beliebige beschränkte Folgen aus H bzw. E. Dann ist wegen der Stetigkeit von S auch die Folge $(Sh_n)_{n=1}^\infty$ in E beschränkt. Da K ein kompakter Operator ist, gibt es nach Lemma 9.2 in F konvergente Teilfolgen $(KSh_{n_k})_{k=1}^\infty$ von $(KSh_n)_{n=1}^\infty$ bzw. $(Ke_{n_k})_{k=1}^\infty$ von $(Ke_n)_{n=1}^\infty$. Wegen der Stetigkeit von T ist dann auch $(TKe_{n_k})_{k=1}^\infty$ eine konvergente Teilfolge von $(TKe_n)_{n=1}^\infty$. Nach Lemma 9.2 sind also TK und KS kompakte Operatoren.

(b) Daß $\mathcal{K}(E, F)$ ein Untervektorraum von $\mathcal{L}(E, F)$ ist rechnet man mit Hilfe von Lemma 9.2 und den Linearitätseigenschaften der Grenzwertbildung direkt nach.

(c) folgt unmittelbar aus (a) und (b).

(d) Sei nun $(K_n)_{n=1}^\infty$ eine bezüglich der Operatornorm gegen einen stetigen linearen Operator $T : E \to F$ konvergente Folge aus $\mathcal{K}(E, F)$ und sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\|T - K_n\| < \varepsilon/3$. Da K_n ein kompakter Operator ist, ist $K_n(B_E)$ relativkompakt also auch präkompakt. Es gibt also endlich viele $x_1, \ldots, x_m \in B_E$ mit

$$\min_{1 \le k \le m} \|K_n x - K_n x_k\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle } x \in B_E\,.$$

Es folgt dann für alle $x \in B_E$:

$$\begin{aligned}\min_{1 \le k \le m} \|Tx - Tx_k\| &\le \min_{1 \le k \le m} \big(\|(T - K_n)x\| + \|K_n x - K_n x_k\| + \|(K_n - T)x_k\|\big)\\ &< \min_{1 \le k \le m} \big(\frac{\varepsilon}{3} + \|K_n x - K_n x_k\| + \frac{\varepsilon}{3}\big) < \varepsilon\,.\end{aligned}$$

Also ist $T(B_E)$ präkompakt in F und damit wegen der Vollständigkeit von F relativkompakt. □

Für einen kompakten topologischen Hausdorffraum K wollen wir die relativkompakten Teilmengen des Banachraums $C(K)$ aller stetigen Funktionen auf K mit Werten in $\mathbb{K}$ charakterisieren. Wir machen zunächst einige Vorbereitungen, die auch in anderer Hinsicht später benötigt werden.

9.5. Satz. *Sei $U_1, \ldots, U_n$ eine endliche offene Überdeckung eines kompakten topologischen Hausdorffraums K. Dann gibt es eine zugehörige Zerlegung der 1, d.h. reellwertige Funktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in C(K)$ mit supp$(\varphi_j) \subseteq U_j$, $0 \le \varphi_j \le 1$ auf K, $j = 1, \ldots, n$, und mit $\sum_{j=1}^n \varphi_j \equiv 1$ auf K.*

Beweis. Zu $U_1, \dots, U_n$ findet man kompakte Mengen $V_j \subseteq U_j$, $j = 1, \dots, n$, mit $K = \bigcup_{j=1}^n V_j$. Nach dem Lemma von Urysohn (siehe z.B. Satz 6.7 in Verbindung mit Beispiel 6.5 in dem Skriptum [**2**] zur Topologie) gibt es Funktionen $\psi_j \in C(K, \mathbb{R})$ mit $\mathrm{supp}\psi_j \subseteq U_j$ und $\psi_j \equiv 1$ auf V_j, $j = 1, \dots, n$. Dann sind die durch

$$\varphi_j(x) := \frac{\psi_j(x)}{\sum_{k=1}^n \psi_k(x)}, \qquad x \in K,$$

definierten Funktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ stetig mit Werten in $[0, 1]$ und erfüllen $\mathrm{supp}\varphi_j \subseteq U_j$, $j = 1, \dots, n$ und $\sum_{j=1}^n \varphi_j \equiv 1$ auf K. □

Ist $\mathcal{F}(X)$ ein Raum von $\mathbb{K}$–wertigen Funktionen auf einer nicht leeren Menge X und E ein $\mathbb{K}$–Vektorraum, so sei für $f \in \mathcal{F}(X)$ und $e \in E$ die Funktion $f \otimes e : X \to E$ definiert durch

$$(f \otimes e)(x) := f(x)e \qquad \text{für alle } x \in X.$$

Wir definieren $\mathcal{F}(X) \otimes E :=\mathrm{LH}\{f \otimes e\,;\, f \in \mathcal{F}(X), e \in E\}$.

9.6. Satz. *Sei K ein kompakter topologischer Hausdorffraum und E ein Banachraum. Dann liegt $C(K) \otimes E$ dicht in $C(K, E)$.*

Beweis. Sei $f \in C(K, E)$ beliebig und $\varepsilon > 0$ beliebig. Da $f(K)$ als stetiges Bild einer kompakten Menge kompakt ist, gibt es zu der offenen Überdeckung $\{U_\varepsilon(e) \ \ e \in f(K)\}$ von $f(K)$ eine endliche Teilüberdeckung $U_\varepsilon(e_1), \dots, U_\varepsilon(e_n)$. Dann bilden die Mengen $U_j := f^{-1}(U_\varepsilon(e_j))$, $j = 1, \dots, n$ eine offene Überdeckung von K, zu der es nach Satz 9.5 eine Zerlegung $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ der Eins gibt. Es folgt für alle $x \in K$:

$$\Big\| f(x) - \sum_{j=1}^n \varphi_j(x) e_j \Big\| = \Big\| \sum_{j=1}^n \varphi_j(x)(f(x) - e_j) \Big\| \le \sum_{j=1}^n \varphi_j(x) \|f(x) - e_j\| < \varepsilon.$$

Hierbei haben wir verwendet, daß $\sum_{j=1}^n \varphi_j \equiv 1$ und $0 \le \varphi \le 1$ auf K gilt, und die Tatsache, daß $\|f(x) - e_j\| < \varepsilon$ für alle $x \in \mathrm{supp}\varphi_j \subset U_j$, $j = 1, \dots, n$. □

9.7. Satz. *Eine Teilmenge H eines Banachraums $(E, \|\cdot\|)$ ist genau dann präkompakt, wenn gilt*

$$(h)_{h \in H} \in \overline{\ell^\infty(H) \otimes E}^{\|\cdot\|_\infty}. \tag{9.1}$$

Beweis. Ist $H \subset E$ präkompakt, so gibt es zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ endlich viele $h_1, \dots, h_n \in H$ mit

$$H \subseteq \bigcup_{j=1}^n U_{\varepsilon/2}(h_j).$$

Zu jedem $h \in H$ gibt es also ein $j(h) \in \{1, \dots, n\}$ mit $h \in U_{\varepsilon/2}(h_{j(h)})$. Für alle $h \in H$ definieren wir: $f(h) := h_{j(h)}$. Dann folgt

$$f = \sum_{k=1}^n f_k \otimes h_k \in \ell^\infty(H) \otimes E \qquad \text{mit } f_k(h) := \begin{cases} 0 & \text{für } j(h) \ne k \\ 1 & \text{für } j(h) = k. \end{cases}$$

Ferner gilt für alle $h \in H$: $\|h - f(h)\| = \|h - h_{j(h)}\| < \varepsilon/2$. Also folgt

$$\|(h)_{h \in H} - f\|_\infty = \sup_{h \in H} \|h - f(h)\| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

und somit (9.1).

Ist umgekehrt (9.1) erfüllt, so gibt es zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ endlich viele Elemente $f_1, \dots, f_n \in \ell^\infty(H)$, $e_1, \dots, e_n \in E$ mit

$$\Big\|(h)_{h\in H} - \sum_{j=1}^{n} f_j \otimes e_j\Big\|_\infty = \sup_{h\in H}\Big\|h - \sum_{j=1}^{n} f_j(h)e_j\Big\| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{9.2}$$

Die Menge

$$B := \Big\{\sum_{j=1}^{n} f_j(h)e_j\,;\, h \in H\Big\}$$

ist als beschränkte Teilmenge des endlich dimensionalen Untervektorraums LH$\{e_1, \dots, e_n\}$ präkompakt. Es gibt also endlich viele $v_1, \dots, v_m \in E$ mit $B \subseteq U_{\varepsilon/2}(v_1) \cup \dots \cup U_{\varepsilon/2}(v_m)$. Insbesondere gibt es zu jedem $h \in H$ ein $k(h) \in \{1, \dots, m\}$ mit

$$\Big\|\sum_{j=1}^{n} f_j(h)e_j - v_{k(h)}\Big\| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Zusammen mit (9.2) folgt für alle $h \in H$:

$$\|h - v_{k(h)}\| \le \Big\|h - \sum_{j=1}^{n} f_j(h)e_j\Big\| + \Big\|\sum_{j=1}^{n} f_j(h)e_j - v_{k(h)}\Big\| < \varepsilon.$$

$\{v_1, \dots, v_m\}$ ist also ein endliches ε–Netz für H. □

9.8. Satz (Ascoli 1883 und Arzela 1885). *Sei (K, d) ein kompakter metrischer Raum. Für $H \subseteq C(K)$ sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *H ist relativkompakt in $C(K)$ bezüglich der Supremumsnorm $\|\cdot\|_K$.*

(b) *H ist punktweise beschränkt und gleichgradig stetig, d.h. es gilt*

   (i) *Für alle $x \in K$ ist $\sup_{h\in H} |h(x)| < \infty$ und*

   (ii) *$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall h \in H\ \forall s, t \in K$: $d(s, t) < \delta \Longrightarrow |h(s) - h(t)| < \varepsilon$.*

Beweis. Ist H eine relativkompakte Teilmenge von $C(K)$, so ist H insbesondere beschränkt und erfüllt $\sup_{h\in H} |h(x)| \le \sup_{h\in H} \|h\|_K < \infty$ und damit (i). Da H präkompakt ist, gibt es zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ endlich viele $h_1, \dots, h_n \in H$ mit $H \subseteq U_{\varepsilon/3}(h_1) \cup \dots \cup U_{\varepsilon/3}(h_n)$. Da die Funktionen $h_1, \dots, h_n$ gleichmäßig stetig sind, gibt es ein $\delta > 0$, so daß für alle $x, y \in K$ mit $d(x, y) < \delta$ und $j = 1, \dots, n$ gilt: $|h_j(x) - h_j(y)| < \varepsilon/3$. Ist nun $h \in H$ beliebig, so ist $h \in U_{\varepsilon/3}(h_j)$ für ein $j \in \{1, \dots, n\}$ und es folgt für alle $x, y \in K$ mit $d(x, y) < \delta$:

$$|h(x) - h(y)| \le |h(x) - h_j(x)| + |h_j(x) - h_j(y)| + |h_j(y) - h(y)| < \varepsilon.$$

H ist also gleichgradig stetig.

Seien nun die Bedingungen (i) und (ii) für H erfüllt. Wegen (i) ist $F : x \mapsto (h(x))_{h\in H}$ eine Abbildung von K nach $\ell^\infty(H)$, die wegen (ii) stetig, also ein Element von $C(K, \ell^\infty(H))$ ist. Also folgt nach Satz 9.6: Zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es endlich viele $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in C(K)$, $u_1 = (u_{1,h})_{h\in H}, \dots, u_n = (u_{n,h})_{h\in H} \in \ell^\infty(H)$ mit

$$\begin{aligned}\varepsilon > \Big\|F - \sum_{j=1}^{n} \varphi_j \otimes u_j\Big\|_K &= \sup_{x\in K}\sup_{h\in H}\Big|h(x) - \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x)u_{j,h}\Big| \\ &= \sup_{h\in H}\sup_{x\in K}\Big|h(x) - \sum_{j=1}^{n} u_{j,h}\varphi_j(x)u_{j,h}\Big| = \Big\|(h)_{h\in H} - \sum_{j=1}^{n} u_j \otimes \varphi_j\Big\|_\infty.\end{aligned}$$

Also folgt $(h)_{h\in H} \in \overline{\ell^\infty(H) \otimes C(K)}^{\|\cdot\|_\infty}$ und damit nach Satz 9.7 die Aussage (a) (mit $E := C(K)$). □

Beispiel. Seien $K_1 \subset \mathbb{R}^N$, $K_2 \subset \mathbb{R}^M$ kompakte Mengen und sei $k \in C(K_1 \times K_2)$. Dann ist der durch

$$(K_k f)(x) := \int_{K_2} k(x,y) f(y) d\lambda_M(y) \qquad (f \in C(K_2), x \in K_1)$$

definierte Integraloperator $K_k : C(K_2) \to C(K_1)$ ein kompakter Operator, wenn wir $C(K_1)$ und $C(K_2)$ jeweils mit den sup–Normen $\|\cdot\|_{K_1}$ bzw. $\|\cdot\|_{K_2}$ auf K_1 bzw. auf K_2 versehen.

Beweis. Für alle $f \in C(K_2)$ ist $\|K_k f\|_{K_1} \leq \|k\|_{K_1 \times K_2} \|f\|_{K_2} \lambda_N(K_1)$. Die Menge $H := \{K_k f \,;\, f \in C(K_2), \|f\|_{K_2} \leq 1\}$ ist also eine Menge von auf K_1 gleichmäßig beschränkten stetigen Funktionen. Da k auf der kompakten Menge $K_1 \times K_2$ stetig, also auch gleichmäßig stetig ist, gibt es zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß für alle $(x,y), (u,v)$ mit $|(x,y) - (u,v)| < \delta$ gilt: $|k(x,y) - k(u,v)| < \varepsilon/(\lambda_M(K_2) + 1)$. Für alle $f \in C(K_2)$ mit $\|f\|_{K_2} \leq 1$ und alle $x_1, x_2 \in K_1$ mit $|x_1 - x_2| < \delta$ gilt dann

$$|(K_k f)(x_1) - (K_k f)(x_2)| \leq \int_{K_2} |k(x_1,y) - k(x_2,y)| \cdot |f(y)| d\lambda_M(y) \leq \frac{\varepsilon \lambda_M(K_2)}{\lambda_M(K_2) + 1} < \varepsilon\,.$$

Nach dem Satz von Arzela–Ascoli ist H also relativkompakt und damit K_k ein kompakter Operator. □

9.9. Satz. *Eine Teilmenge H von $\ell^p(\mathbb{N})$ $(1 \leq p < \infty)$ ist genau dann relativkompakt in $\ell^p(\mathbb{N})$, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(a) $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists c_k \geq 0\ \forall x = (x_n)_{n=1}^\infty \in H$: $|x_k| \leq c_k$.

(b) *Die Reihe $\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p$ ist auf H gleichmäßig konvergent, d.h. es gilt*

$$\sup \Big\{ \Big(\sum_{k=n}^\infty |x_k|^p \Big)^{1/p} ;\, x = (x_j)_{j=1}^\infty \in H \Big\} \to 0 \qquad \textit{für } n \to \infty.$$

Beweis. Für $j \in \mathbb{N}$ sei $e_j := (\delta_{j,n})_{n=1}^\infty$ der j–te Einheitsvektor in $\ell^p(\mathbb{N})$. Sind für $H \subset \ell^p(\mathbb{N})$ die Bedingungen (a) und (b) erfüllt, so gilt wegen (a) für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$\Big(\sum_{j=1}^k h_j e_j \Big)_{h \in H} = \sum_{j=1}^k (h_j)_{h \in H} \otimes e_j \in \ell^\infty(\mathbb{N}) \otimes \ell^p(\mathbb{N})$$

und wegen (b) folgt

$$\Big\| (h)_{h \in H} - \sum_{j=1}^k (h_j)_{h \in H} \otimes e_j \Big\|_\infty = \sup_{h \in H} \Big(\sum_{j=k+1}^\infty |h_j|^p \Big)^{1/p} \to 0 \qquad \text{für } k \to \infty.$$

Nach Satz 9.7 ist H also präkompakt.

Ist umgekehrt $H \subset \ell^p(\mathbb{N})$ präkompakt, so ist H insbesondere beschränkt und es folgt (a), denn für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt: $\sup_{h \in H} |h_k| \leq \sup_{h \in H} \|h\|_p < \infty$. Da H präkompakt ist, gibt es zu einem beliebig vorgegebenen $\varepsilon > 0$ ein endliches $\varepsilon/3$–Netz $h_1 = (h_{1,j})_{j=1}^\infty, \ldots, h_m = (h_{m,j})_{j=1}^\infty \in \ell^p(\mathbb{N})$. Insbesondere gilt $\sum_{j=n}^\infty |h_{k,j}|^p \to 0$ für $n \to \infty$ für $k = 1, \ldots, m$. Zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt also ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq n_0$ gilt: $\sum_{j=n}^\infty |h_{k,j}|^p < (\varepsilon/3)^p$, $k = 1, \ldots, m$. Seien nun $n \geq n_0$ und $x = (x_j)_{j=1}^\infty \in H$ beliebig. Dann gibt es ein $k \in \{1, \ldots, m\}$ mit $x \in U_{\varepsilon/3}(h_k)$ und es folgt

$$\begin{aligned} \Big(\sum_{j=n}^\infty |x_j|^p \Big)^{1/p} &\leq \|x - h_k\|_p + \Big(\sum_{j=n}^\infty |h_{k,j}|^p \Big)^{1/p} + \Big(\sum_{j=1}^{n-1} |h_{k,j} - x_j|^p \Big)^{1/p} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \|x - h_k\|_p < \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Also ist auch (b) erfüllt. □

9.10. Bemerkung. Für beschränkte Mengen $H \subset \ell^p(\mathbb{N})$ ist die Bedingung (a) im vorstehenden Satz automatisch erfüllt.

9.11. Beispiel. Sei $1 < p < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Für $k = (k_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}} \in \ell^{p'}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ wird durch

$$K_k(x) := \Big(\sum_{m=1}^{\infty} k_{n,m} x_m\Big)_{n=1}^{\infty} \qquad \text{für } x = (x_m)_{m=1}^{\infty} \in \ell^p(\mathbb{N})$$

ein kompakter Operator $K_k : \ell^p(\mathbb{N}) \to \ell^{p'}$ definiert.

Beweis. Für alle $x = (x_m)_{m=1}^{\infty} \in \ell^p(\mathbb{N})$ schätzt man mit der Hölderschen Ungleichung ab:

$$\|K_k x\|_{p'} = \Big(\sum_{n=1}^{\infty}\Big|\sum_{m=1}^{\infty} k_{n,m}x_m\Big|^{p'}\Big)^{\frac{1}{p'}} \le \Big(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|k_{n,m}|^{p'}\|x\|_p^{p'}\Big)^{\frac{1}{p'}} = \|k\|_{p'}\|x\|_p$$

Insbesondere ist K_k stetig und daher $H := K_k(B)$ beschränkt in $\ell^{p'}(\mathbb{N})$ mit $B := \{x \in \ell^p(\mathbb{N}); \|x\|_p \le 1\}$. Nach der vorstehenden Bemerkung ist also (a) in Satz 9.9 erfüllt (für p' statt p). Ferner hat man mit den Bezeichnungen aus 9.9 für alle $x = (x_m)_{m=1}^{\infty} \in B$ und alle $N \in \mathbb{N}$ (wieder mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung):

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\Big|\sum_{m=1}^{\infty} k_{n,m}x_m\Big|^{p'} \le \sum_{n=N+1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|k_{n,m}|^{p'}\|x\|_p^{p'} \le \sum_{n=N+1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|k_{n,m}|^{p'} \to 0$$

für $N \to \infty$ wegen der Summierbarkeit von $(|k_{n,m}|^{p'})_{n,m\in\mathbb{N}}$. Hiermit folgt, daß auch Bedingung (b) aus Satz 9.9 erfüllt ist. Nach Satz 9.9 ist also $H = K_k(B)$ relativkompakt in $\ell^{p'}(\mathbb{N})$ und daher der Operator K_k kompakt. □

9.12. Satz. *Sei $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Prä-Hilbertraum über $\mathbb{K}$, $\mathcal{H} \ne \{0\}$. Ist $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ein kompakter, hermitescher Operator, so gibt es einen Eigenwert $\mu_0 \in \mathbb{R}$ von T mit $|\mu_0| = \|T\|$.*

Beweis. Für $T = 0$ ist die Behauptung trivial, denn dann ist (wegen $\mathcal{H} \ne \{0\}$) $\mu_0 := 0$ ein Eigenwert von T. Sei nun also $T \ne 0$ vorausgesetzt. Nach Lemma 2.45 gilt

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x\rangle|\,;\, x \in \mathcal{H}, \|x\| \le 1\}\,.$$

Daher gibt es eine Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ in $B_{\mathcal{H}}$ mit $|\langle Tx_n, x_n\rangle| \to \|T\|$ für $n \to \infty$. Da T nach Voraussetzung ein kompakter Operator ist, können wir o.B.d.A. (durch Übergang zu einer Teilfolge) voraussetzen, daß die Folge $(Tx_n)_{n=1}^{\infty}$ gegen ein $y_0 \in \mathcal{H}$ konvergiert. Nun ist die Folge $(\langle Tx_n, x_n\rangle)_{n=1}^{\infty}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$, besitzt also eine gegen ein $\mu_0 \in \mathbb{R}$ konvergente Teilfolge $(\langle Tx_{n_k}, x_{n_k}\rangle)_{k=1}^{\infty}$ und es ist $|\mu_0| = \|T\| > 0$. Mit $x_0 := \frac{1}{\mu_0}y_0$ folgt $Tx_{n_k} \to \mu_0 x_0$ und $\|x_0\| \le 1$. Ferner gilt (da T hermitesch ist):

$$\begin{aligned} 0 \le& \|Tx_{n_k} - \mu_0 x_{n_k}\|^2 = \|Tx_{n_k}\|^2 - 2\mu_0\langle Tx_{n_k}, x_{n_k}\rangle + \mu_0^2\|x_{n_k}\|^2 \\ \le& \|T\|^2 - 2\mu_0\langle Tx_{n_k}, x_{n_k}\rangle + \mu_0^2 = 2\mu_0(\mu_0 - \langle Tx_{n_k}, x_{n_k}\rangle) \to 0 \end{aligned}$$

für $k \to \infty$. Es folgt $\lim_{k\to\infty} \mu_0 x_{n_k} = \lim_{k\to\infty} Tx_{n_k} = \mu_0 x_0$. Also ist $x_0 = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$ und damit auch wegen der Stetigkeit von T: $\mu_0 x_0 = \lim_{k\to\infty} Tx_{n_k} = Tx_0$. Wegen

$$0 \ne |\mu_0| = \lim_{k\to\infty} |\langle Tx_{n_k}, x_{n_k}\rangle| = |\langle Tx_0, x_0\rangle| = |\mu_0|\langle x_0, x_0\rangle$$

ist $\|x_0\| = 1$ und damit insbesondere $x_0 \ne 0$. □

9.13. Bemerkung. Der Beweis zeigt, daß für kompakte, hermitesche Operatoren die Funktion q_T mit $q_T(x) := |\langle Tx, x\rangle|$ für alle $x \in B_{\mathcal{H}}$ ihr Maximum $\|T\|$ auf der Einheitssphäre $S_{\mathcal{H}} := \{x \in \mathcal{H}; \|x\| = 1\}$ von $\mathcal{H}$ annimmt.

Die folgenden Beispiele zeigen, daß man die Voraussetzungen in Satz 9.12 auch tatsächlich benötigt.

9.14. Beispiele. Sei $\mathcal{H}$ der Prä-Hilbertraum $(C([0,1]), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ mit dem durch $\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$ für $f, g \in C([0,1])$ gegebenem Skalarprodukt.

(a) Der Operator T mit $(Tf)(t) := tf(t)$ für alle $f \in C([0,1]), t \in [0,1]$ ist hermitesch, besitzt aber keine Eigenwerte.
(b) Der Operator V mit $(Vf)(t) := \int_0^t f(s)ds$ für alle $f \in C([0,1]), t \in [0,1]$ ist kompakt und hat ebenfalls keine Eigenwerte.

Beweis als Übung.

Wir können nun einen für die Anwendungen sehr wichtigen Entwicklungssatz für kompakte hermitesche Operatoren beweisen.

9.15. Spektralsatz für kompakte hermitesche Operatoren. *Sei $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein undendlich dimensionaler Prä–Hilbertraum über $\mathbb{K}$ und sei $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein kompakter, hermitescher Operator. Zu dem Eigenwertproblem*

$$Tx = \mu x$$

gibt es abzählbar unendlich viele Paare $(\mu_j, x_j) \in \mathbb{R} \times \mathcal{H}$, $j \in \mathbb{N}_0$, so daß gilt:

(a) *Für alle $j \in \mathbb{N}_0$ ist μ_j ein Eigenwert von T und x_j ein zugehöriger Eigenvektor mit $\|x_j\| = 1$. Die Folge $(x_j)_{j=0}^\infty$ bildet ein Orthonormalsystem.*
(b) $\|T\| = |\mu_0| \geq |\mu_1| \geq \cdots \geq |\mu_n| \geq |\mu_{n+1}| \geq \ldots$ *und es gilt $|\mu_n| \to 0$ für $n \to \infty$.*
(c) *Mit $\mathcal{H}_n := \{x_0, \ldots, x_{n-1}\}^\perp$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:*

$$|\mu_n| = \sup\{|\langle Tx, x\rangle| \,;\, x \in \mathcal{H}_n, \|x\| \leq 1\} = \sup\{\|Tx\| \,;\, x \in \mathcal{H}_n, \|x\| \leq 1\}\,.$$

(d) *Jedes Element aus dem Bildraum von T wird durch seine Entwicklung nach dem Orthonormalsystem $(x_j)_{j=0}^\infty$ dargestellt und es gilt für alle $x \in \mathcal{H}$:*

$$Tx = \sum_{n=0}^\infty \langle Tx, x_n\rangle x_n = \sum_{n=0}^\infty \langle x, Tx_n\rangle x_n = \sum_{n=0}^\infty \mu_n \langle x, x_n\rangle x_n\,.$$

(e) *Für jeden von 0 verschiedenen Eigenwert μ von T gibt es ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $\mu_n = \mu$. Der zugehörige Eigenraum $E_\mu := \{x \in \mathcal{H}\,;\, Tx = \mu x\} = \ker(\mu 1_{\mathcal{H}} - T)$ ist endlich dimensional und hat $\{x_k\,;\, \mu_k = \mu\}$ als Basis.*

Beweis. Wir konstruieren die Paare (μ_n, x_n) induktiv. Das Paar (μ_0, x_0) wählen wir gemäß Satz 9.12. Seien nun schon für ein $n \in \mathbb{N}_0$ die Eigenwerte $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n$ mit den zugehörigen Eigenvektoren so gefunden, daß die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

(i) $\|T\| = |\mu_0| \geq |\mu_1| \geq \cdots \geq |\mu_n|$.
(ii) $\langle x_j, x_k\rangle = \delta_{j,k}$ für alle $j, k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.
(iii) Mit $\mathcal{H}_0 := \mathcal{H}$ gilt für $j = 0, 1, \ldots, n$:

$$|\mu_j| = \sup\{|\langle Tx, x\rangle| \,;\, x \in \mathcal{H}_j, \|x\| \leq 1\} = \sup\{\|Tx\| \,;\, x \in \mathcal{H}_j, \|x\| \leq 1\}\,.$$

Wir konstruieren nun einen Eigenwert μ_{n+1} und einen zugehörigen Eigenvektor, so daß die Forderungen (i)-(iii) auch für $n + 1$ erfüllt sind.

$\mathcal{H}_{n+1} := \{x_0, \ldots, x_n\}^\perp$ ist ein abgeschlossener Untervektorraum, der versehen mit dem (auf $\mathcal{H}_{n+1} \times \mathcal{H}_{n+1}$ eingeschränkten) Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ wieder ein Prä–Hilbertraum über $\mathbb{K}$ ist. Wegen $\langle Tx, x_j\rangle = \langle x, Tx_j\rangle = \mu_j\langle x, x_j\rangle = 0$ für alle $x \in \mathcal{H}_{n+1}$ und $j = 0, \ldots, n$ folgt

$T(\mathcal{H}_{n+1}) \subseteq \mathcal{H}_{n+1}$. Der Unterraum $\mathcal{H}_{n+1}$ ist also unter T invariant und die Restriktion $T|_{\mathcal{H}_{n+1}} : \mathcal{H}_{n+1} \to \mathcal{H}_{n+1}$ ist natürlich ebenfalls kompakt und hermitesch. Da $\mathcal{H}$ unendlich dimensional ist, ist $\mathcal{H}_{n+1} \neq \{0\}$. Wir können also Satz 9.12 auf $T|_{\mathcal{H}_{n+1}} : \mathcal{H}_{n+1} \to \mathcal{H}_{n+1}$ anwenden und finden einen Eigenvektor μ_{n+1} von $T|_{\mathcal{H}_{n+1}}$ und damit auch von T sowie einen zugehörigen Eigenvektor $x_{n+1} \in \mathcal{H}_{n+1}$ mit $\|x_{n+1}\| = 1$ und mit

$$\begin{aligned}|\mu_{n+1}| =& \|T|_{\mathcal{H}_{n+1}}\| = \sup\{|\langle Tx, x\rangle| \, ; \, x \in \mathcal{H}_{n+1}, \|x\| \leq 1\} \\ =& \sup\{\|Tx\| \, ; \, x \in \mathcal{H}_{n+1}, \|x\| \leq 1\} \, .\end{aligned}$$

Insbesondere folgt wegen $\mathcal{H}_{n+1} \subset \mathcal{H}_n$

$$|\mu_{n+1}| = \|T|_{\mathcal{H}_{n+1}}\| \leq \|T|_{\mathcal{H}_n}\| = |\mu_n| \, .$$

Die Forderungen (i)-(iii) sind nun auch für $n+1$ erfüllt. Damit ist (μ_{n+1}, x_{n+1}) wie gewünscht gefunden und es folgen die Behauptungen (a) und (c) sowie der erste Teil von (b).

Den zweiten Teil der Behauptung in (b) beweisen wir indirekt:

Annahme: Die Folge $(\mu_n)_{n=0}^\infty$ konvergiert nicht gegen 0. Dann ist die Folge $(\frac{1}{\mu_n})_{n=0}^\infty$ in $\mathbb{R}$ und damit auch die Folge $(\frac{1}{\mu_n} x_n)_{n=0}^\infty$ in $\mathcal{H}$ beschränkt. Da T ein kompakter Operator ist besitzt die Folge $(T(\frac{1}{\mu_n} x_n))_{n=0}^\infty$ eine in $\mathcal{H}$ konvergente Teilfolge $(T(\frac{1}{\mu_{n_k}} x_{n_k}))_{k=0}^\infty$. Dies ist aber wegen

$$\|T(\frac{1}{\mu_n} x_n) - T(\frac{1}{\mu_j} x_j)\| = \|x_n - x_j\| = 2 \quad \text{für alle } j, n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \neq j$$

nicht möglich. Also war die Annahme falsch und (b) ist bewiesen.

Zu (d): Für alle $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $P_n : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ durch $P_n x := \sum_{j=0}^n \langle x, x_j\rangle x_j$ für alle $x \in \mathcal{H}$. Dann folgt für $0 \leq k \leq n$:

$$\langle x - P_n x, x_k\rangle = \langle x, x_k\rangle - \sum_{j=0}^n \langle x, x_j\rangle \langle x_j, x_k\rangle = 0 \, .$$

Also ist $x - P_n x \in \mathcal{H}_{n+1}$ für alle $x \in \mathcal{H}, n \in \mathbb{N}$. Nach der Besselschen Ungleichung ist $\|P_n x\| \leq \|x\|$. Es folgt für alle $x \in \mathcal{H}$:

$$\|T(x - P_n x)\| = \|T|_{\mathcal{H}_n}(x - P_n x)\| \leq \|T|_{\mathcal{H}_{n+1}}\| \cdot \|x - P_n x\| \leq 2|\mu_n| \cdot \|x\| \to 0 \text{ für } n \to \infty \, .$$

Damit ergibt sich für alle $x \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned}Tx = \lim_{n\to\infty} TP_n x = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^n \langle x, x_j\rangle Tx_j &= \sum_{j=0}^\infty \langle x, x_j\rangle Tx_j = \sum_{j=0}^\infty \langle x, x_j\rangle \mu_j x_j \\ = \sum_{j=0}^\infty \langle x, \mu_j x_j\rangle x_j &= \sum_{j=0}^\infty \langle x, Tx_j\rangle x_j = \sum_{j=0}^\infty \langle Tx, x_j\rangle x_j\end{aligned}$$

und (d) ist bewiesen.

Zu (e): Sei $\mu \neq 0$ ein Eigenwert von T und $x \neq 0$ ein zugehöriger Eigenvektor. Dann folgt für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\mu\langle x, x_n\rangle = \langle Tx, x_n\rangle = \langle x, Tx_n\rangle = \mu_n \langle x, x_n\rangle \, .$$

Ist also $\mu \neq \mu_n$, so folgt $\langle x, x_n\rangle = 0$. Demnach kann μ nicht von allen $\mu_n, n \in \mathbb{N}_0$ verschieden sein, da sonst die unmögliche Aussage

$$0 \neq \mu x = Tx = \sum_{j=0}^\infty \langle x, x_j\rangle \mu_j x_j = 0$$

folgen würde. Nach Bemerkung 9.3 (c) ist $\dim E_\mu < \infty$. $\square$

9.16. Folgerung. *Sei $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein unendlich dimensionaler Hilbertraum über $\mathbb{K}$. Gibt es auf $\mathcal{H}$ einen injektiven, kompakten, hermiteschen Operator, so ist $\mathcal{H}$ separabel und das in dem Beweis des Spektralsatzes konstruierte Orthonormalsystem von Eigenvektoren von T ist eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$.*

Beweis. Sei also ein injektiver, kompakter, hermitescher Operator T auf $\mathcal{H}$ gegeben. Dann ist $(\operatorname{ran} T)^\perp = \ker T^* = \ker T = \{0\}$ (vergl. Lemma 2.46). Nach Satz 2.21 liegt $\operatorname{ran} T$ also dicht in $\mathcal{H}$. Nach Teil (d) des Spektralsatzes liegt also die lineare Hülle des in 9.15 konstruierten Orthonormalsystems dicht in $\mathcal{H}$ und ist somit ein vollständiges Orthonormalsystem, also auch eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$. Da diese abzählbar unendlich ist, ist $\mathcal{H}$ nach Satz 2.33 separabel. □

Übungsaufgaben zu Kapitel 9. In diesem Abschnitt sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{K}$ heißt *Hölder–stetig mit Exponent* $\alpha \in (0,1]$, falls gilt

$$q_\alpha(f) := \sup_{x,y\in\Omega, x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty\,. \tag{9.3}$$

Die mit dem Exponenten $\alpha = 1$ Hölder–Stetigen Funktionen stimmen also mit den Lipschitz–stetigen Funktionen überein.

Für $m \in \mathbb{N}_0$ und $0 < \alpha \le 1$ sei $C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$ der Raum der auf Ω m mal stetig differenzierbaren Funktionen, die mit allen Ableitungen der Ordnung $\le m$ stetig auf $\overline{\Omega}$ fortsetzbar sind und die mit allen Ableitungen der Ordnung $\le m$ Hölder–stetig auf Ω vom Exponenten α sind.

9.1. Aufgabe. Zeigen Sie:

(a) Durch

$$\|f\|_{m,\alpha} := \max_{|\gamma|\le m} \sup_{x\in\Omega} \Big|\frac{\partial^\gamma f}{\partial x^\gamma}(x)\Big| + \max_{|\gamma|=m} q_\alpha\Big(\frac{\partial^\gamma f}{\partial x^\gamma}\Big) \qquad \text{für } f \in C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$$

wird eine Norm auf $C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$ erklärt, bezüglich der $C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$ ein Banachraum ist.

(b) Für $0 < \alpha < 1$ gilt $C^{m+1}(\overline{\Omega}) \subset C^{m,\alpha}(\overline{\Omega}) \subset C^m(\overline{\Omega})$ mit kompakten Einbettungen. Hierbei sei $C^m(\overline{\Omega})$ der Banachraum der auf Ω m mal stetig differenzierbaren Funktionen, die mit allen Ableitungen der Ordnung $\le m$ stetig auf $\overline{\Omega}$ fortsetzbar sind, versehen mit der Norm

$$\|f\|_m := \max_{|\gamma|\le m} \sup_{x\in\Omega} \Big|\frac{\partial^\gamma f}{\partial x^\gamma}(x)\Big| \qquad f \in C^m(\overline{\Omega}).$$

9.2. Aufgabe. Sei $C_b(\mathbb{R})$ der Banachraum der auf $\mathbb{R}$ beschränkten stetigen Funktionen versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$. Für $x \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ definieren wir:

$$f(x) := \begin{cases} x^2(1-x^2) & \text{für } -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{für } |x| \ge 1 \end{cases} \qquad \text{und } f_k(x) := f(x+k)\,.$$

Zeigen Sie: Die Folge $(f_k)_{k=0}^\infty$

(a) ist punktweise beschränkt.
(b) ist gleichgradig stetig.
(c) ist punktweise konvergent.
(d) besitzt keine gleichmäßig konvergente Teilfolge.

9.3. Aufgabe. (a) Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum mit Orthonormalbasis $\{e_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ und $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$. Wir definieren zu $k \in \mathbb{N}_0$ beliebig aber fest eine Abbildung T auf $\mathcal{H}$ folgendermaßen:

$$T\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle e_n\Big) := \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle \alpha_n e_{n+k} \qquad \text{für alle } x \in \mathcal{H}.$$

Zeigen Sie, daß T nach $\mathcal{H}$ abbildet und stetig ist. Geben Sie $\|T\|$ an.

(b) Zeigen Sie, daß der in (a) definierte Operator genau dann kompakt ist, wenn $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

9.4. Aufgabe. Sei T ein stetiger Operator auf einem separablen Hilbertraum $\mathcal{H}$. Man nennt T einen *Hilbert-Schmidt-Operator*, wenn es eine Orthonormalbasis $\{e_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ von $\mathcal{H}$ gibt, so daß gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty}\|Te_i\|^2 < \infty. \tag{9.4}$$

(a) Zeigen Sie, daß Bedingung 9.4 für jede Orthonormalbasis erfüllt ist, wenn sie schon für eine Orthonormalbasis gilt und alle Summen der Form 9.4 denselben Wert haben (dessen Wurzel wir mit $\|T\|_{HS}$ bezeichnen). Außerdem ist T Hilbert-Schmidt-Operator genau dann, wenn T^* ein solcher ist.

(b) Es gilt $\|T\| \le \|T\|_{HS}$.

(c) Jeder Hilbert-Schmidt-Operator ist kompakt.

Hinweis zu (a): Zeigen Sie für zwei Orthonormalbasen $\{e_i\}, \{f_j\}$ von $\mathcal{H}$, daß $\sum_{i=1}^{\infty}\|Te_i\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty}\|T^*f_j\|^2$ gilt.

9.5. Aufgabe. (a) Welche der Operatoren aus Aufgabe 9.3 sind Hilbert-Schmidt-Operatoren?

(b) Zeigen Sie: T ist Hilbert-Schmidt-Operator $\Leftrightarrow$ T^*T ist kompakt und die Familie der Eigenwerte von T^*T ist summierbar.

9.6. Aufgabe. Führen Sie die Beweise zu den Beispielen in 9.14 aus.

9.7. Aufgabe. Sei H ein Hilbertraum und $T \in \mathcal{K}(H)$ positiv und selbstadjungiert. Zeigen Sie, daß genau ein positiver selbstadjungierter Operator $S \in \mathcal{K}(H)$ existiert mit $S^2 = T$. Man schreibt $S = T^{1/2}$.

9.8. Aufgabe. Sei $T : H_1 \to H_2$ ein kompakter Operator zwischen zwei Hilberträumen.

(a) Zeigen Sie, daß T^*T kompakt, selbstadjungiert und positiv ist. Der nach Aufgabe 9.7 daher eindeutig bestimmte Operator $(T^*T)^{1/2}$ wird mit $|T|$ bezeichnet.

(b) Es gilt $\||T|h\| = \|Th\|$ für alle $h \in H_1$.

(c) Es existieren Operatoren $U \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ und $P \in \mathcal{L}(H_1)$ mit $T = UP$, so daß P kompakt und positiv ist und $U|_{(\ker U)^\perp}$ eine Isometrie. U ist durch die Forderung $\ker U = \ker T$ eindeutig bestimmt.

9.9. Aufgabe. Seien H_1, H_2 Hilberträume.

(a) Für $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$ existieren Orthonormalsysteme $\{e_1, e_2, ...\}$ von H_1 und $\{f_1, f_2, ...\}$ von H_2 sowie eine monoton fallende Folge nicht negativer Zahlen s_k mit $s_k \to 0$, so daß

$$Tx = \sum_{k=1}^{\infty} s_k\langle x, e_k\rangle_{H_1} f_k \qquad \text{für alle } x \in H_1.$$

Welche Bedeutung haben die Zahlen s_k^2?

(b) Zeigen Sie, daß die linearen Operatoren von H_1 nach H_2 mit endlichdimensionalem Bild dicht liegen in $\mathcal{K}(H_1, H_2)$.

KAPITEL 10

Grundlagen aus der Fredholmtheorie

Im folgenden seien $(E;\|\cdot\|_E)$, $(F,\|\cdot\|_F)$ und $(G,\|\cdot\|_G)$ Banachräume über dem Körper $\mathbb{K}$ der reellen oder komplexen Zahlen. Die Identität auf diesen Räumen bezeichnen wir mit 1.

10.1. Lemma. *Ist $E = E_1 \oplus E_2$ die algebraisch direkte Summe zweier Untervektorräume E_1 und E_2, so sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *E_1 und E_2 sind abgeschlossen.*
(b) *Es gibt $P \in \mathcal{L}(E)$ mit $P^2 = P$, $\operatorname{ran}(P) = E_1$ und $\ker(P) = E_2$, d.h. die Unterräume E_1 und E_2 sind insbesondere stetig projiziert.*
(c) *Der algebraische Isomorphismus $S : E_1 \times E_2 \to E$ mit $S(x_1, x_2) := x_1 + x_2$ für alle $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$ ist ein topologischer Isomorphismus. Hierbei sei $E_1 \times E_2$ versehen mit der Produktnorm.*

Beweis. "(a)$\Longrightarrow$(c)": Ist (a) erfüllt, so ist insbesondere $E_1 \times E_2$ ein Banachraum und der algebraische Isomorphismus S ist offensichtlich stetig, also nach dem Satz von der inversen Abbildung ein topologischer Isomorphismus.

"(c)$\Longrightarrow$(b)": Ist (c) erfüllt, so ist $Q : E_1 \times E_2 \to E_1 \times E_2$ mit $Q(x_1, x_2) := (x_1, 0)$ für alle $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ eine stetige lineare Projektion. Also ist auch $P := SQS^{-1}$ eine stetige lineare Projektion. Diese erfüllt $\operatorname{ran}(P) = E_1$ und $\ker(P) = E_2$.

"(b)$\Longrightarrow$(a)": Ist (b) erfüllt und P wie in (b), so sind $E_2 = \ker(P)$ und $E_1 = \ker(1-P)$ wegen der Stetigkeit von P und $1 - P$ abgeschlossen. □

10.2. Lemma (Kato 1958). *Ist $T \in \mathcal{L}(E, F)$ ein stetiger linearer Operator mit*

$$\operatorname{codim} \operatorname{ran}(T) := \dim F/\operatorname{ran}(T) = n < \infty\,,$$

so ist $\operatorname{ran}(T)$ abgeschlossen und es gibt eine Projektion $P \in \mathcal{L}(F)$ mit $\dim \operatorname{ran}(1-P) = n$ und $\operatorname{ran}(P) = \operatorname{ran}(T)$.

Beweis. Sei $\pi : E \to E/\ker(T)$ der kanonische Epimorphismus und $\hat{T} : E/\ker(T) \to F$ der von T induzierte Monomorphismus. Wegen der Stetigkeit von T ist $\ker(T)$ abgeschlossen und auch $\hat{T}$ stetig mit $\operatorname{ran}(\hat{T}) = \operatorname{ran}(T)$. Wegen $\dim F/\operatorname{ran}(T) = n < \infty$ gibt es Elemente $y_1, \dots, y_n \in F$ mit

$$F = \operatorname{ran}(T) + \operatorname{LH}\{y_1, \dots, y_n\} \quad \text{und} \quad \operatorname{ran}(T) \cap \operatorname{LH}\{y_1, \dots, y_n\} = \{0\}\,.$$

$X := E/\ker(T) \times \mathbb{C}^n$ wird zu einem Banachraum durch

$$\|([x], z)\|_X := \|[x]\|_{E/\ker(T)} + \sum_{j=1}^{n} |z_j| \qquad ([x] \in E/\ker(T), z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n)$$

Der Operator $S : X \to F$ mit $S([x], z) := \hat{T}([x]) + \sum_{j=1}^{n} z_j y_j$ ist offensichtlich stetig und bijektiv. Nach dem Satz 5.7 von der inversen Abbildung ist dann auch $S^{-1} : F \to X$ stetig und $\operatorname{ran} T = (S^{-1})^{-1}(E/\ker(T) \times \{0\})$ ist als Urbild des abgeschlossenen Unterraums $E/\ker(T) \times \{0\}$ unter der stetigen Abbildung S^{-1} abgeschlossen.

Sei $Q : X \to X$ die stetige Projektion $([x], z) \mapsto ([x], 0)$. Dann ist $P := SQS^{-1}$ stetig und erfüllt $P^2 = P$, $\operatorname{ran}(P) = \operatorname{ran}(SQ) = \operatorname{ran}(T)$ und $\operatorname{ran}(1 - T) = \operatorname{ran}(S(1 - Q) = \operatorname{LH}\{y_1, \dots, y_n\}$. □

10.3. Lemma. *Sei E_1 ein endlich dimensionaler Untervektorraum von E und sei E_2 ein abgeschlossener Untervektorraum von E. Dann ist auch der Untervektorraum $E_1 + E_2$ abgeschlossen in E.*

Beweis. Sei $\pi : E \to E/E_2$ der kanonische Epimorphismus. Da mit E_1 auch $\pi(E_1)$ endlich dimensional und somit abgeschlossen in E/E_2 ist, ist wegen der Stetigkeit von π auch der Raum $E_1 + E_2 = \pi^{-1}(\pi(E_1))$ abgeschlossen in E. □

10.4. Definition. $T \in \mathcal{L}(E, F)$ heißt *Fredholmoperator*, falls $\dim\ker(T) < \infty$ und $\operatorname{codim}\operatorname{ran} T = \dim F/\operatorname{ran}(T) < \infty$. Dann ist

$$\operatorname{ind}(T) := \dim\ker(T) - \dim F/\operatorname{ran}(T)$$

eine ganze Zahl. $\operatorname{ind}(T)$ heißt der *Index* von T.

Mit $\Phi(E, F)$ bezeichnen wir die Menge aller Fredholmoperatoren von E nach F. Ferner sei für alle $n \in \mathbb{Z}$ die Menge der Fredholmoperatoren vom Index n mit

$$\Phi_n(E, F) := \{T \in \Phi(E, F)\,;\, \operatorname{ind}(T) = n\}$$

bezeichnet. Statt $\Phi(E, E)$ bzw. $\Phi_n(E, E)$ schreiben wir auch $\Phi(E)$ bzw. $\Phi_n(E)$.

10.5. Beispiel. Sei $E := \ell^p(\mathbb{N}_0)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir $S_n, T_n \in \mathcal{L}(E)$ durch $x = (x_k)_{k=0}^\infty \mapsto T_n(x) := (x_{k+n})_{k=0}^\infty$ und $x = (x_k)_{k=0}^\infty \mapsto S_n(x) := (y_k)_{k=0}^\infty$ mit $y_k := 0$ für $0 \le k < n$ und $y_k := x_{k-n}$ für $k \ge n$. Dann sind die Operatoren T_n, S_n stetig mit $\|T_n\| = \|S_n\| = 1$. Man hat $T_n, S_n \in \Phi(E)$ mit $\operatorname{ind}(T_n) = n$ und $\operatorname{ind}(S_n) = -n$. Alle ganzen Zahlen können also als Index auftreten.

Eine wichtige Klasse von Beispielen wird durch den folgenden Satz gegeben:

10.6. Satz. *Für jeden kompakten Operator $K \in \mathcal{K}(E)$ ist $1 - K \in \Phi(E)$.*

Beweis. (a) $\dim\ker(1 - K) < \infty$: Dies ist unmittelbar klar nach Bemerkung 9.3 (c).

(b) $\operatorname{ran}(1 - K)$ ist abgeschlossen: Wegen $\dim\ker(1 - K) < \infty$ existiert nach Satz 6.10 eine Projektion $Q \in \mathcal{L}(E)$ mit $\operatorname{ran}(Q) = \ker(1 - K)$. Wegen der Stetigkeit von Q ist dann $E_1 := \ker(Q) = \operatorname{ran}(1 - Q)$ abgeschlossen in E und es gilt $\operatorname{ran}(1 - K) = (1 - K)(E_1)$. Sei nun $y \in \overline{\operatorname{ran}(1 - K)} = \overline{(1 - K)(E_1)}$ beliebig. Dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n=1}^\infty$ in E_1 mit $(1 - K)x_n \to y$ in E für $n \to \infty$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Fall: Die Folge $(x_n)_{n=1}^\infty$ ist unbeschränkt. Durch Übergang zu einer Teilfolge können wir dann annehmen, daß $\|x_n\|_E \to \infty$ für $n \to \infty$. Mit $u_n := \|x_n\|_E^{-1} x_n$ folgt $\|u_n\|_E = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\|(1 - K)u_n\|_E = \frac{1}{\|x_n\|_E}\|(1 - K)x_n\|_E \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty. \tag{10.1}$$

Da der Operator K kompakt ist, hat die Folge $(Ku_n)_{n=1}^\infty$ eine gegen ein Element $v \in E$ konvergente Teilfolge $(Ku_{n_k})_{k=1}^\infty$. Wegen (10.1) folgt hieraus $u_{n_k} \to v$ für $k \to \infty$ und wegen der Stetigkeit von $1 - K$ und (10.1) somit $(1 - K)v = 0$. Da E_1 abgeschlossen ist, liegt v in E_1 und es folgt $v \in E_1 \cap \ker(1 - K) = \{0\}$, d.h. $v = 0$ im Widerspruch zu $\|v\|_E = \lim_{k\to\infty} \|u_{n_k}\|_E = 1$. Dieser Fall kann also nicht eintreten und es bleibt nur:

2. Fall: Die Folge $(x_n)_{n=1}^\infty$ ist beschränkt. Dann hat die Folge $(Kx_n)_{n=1}^\infty$ eine konvergente Teilfolge $(Kx_{n_k})_{k=1}^\infty$. Also ist $x_{n_k} = (1 - K)x_{n_k} + Kx_{n_k}$ gegen ein Element $x_0 \in E_1$ konvergent. Wegen der Stetigkeit von $1 - K$ folgt

$$y = \lim_{k\to\infty} (1 - K)x_{n_k} = (1 - K)x_0$$

und somit $y \in \operatorname{ran}(1-K)$. Also hat $1-K$ ein abgeschlossenes Bild.

(c) Zu zeigen bleibt: $\dim(E/\operatorname{ran}(1-K)) < \infty$. Wir führen den Beweis indirekt und nehmen an, daß $\dim(E/\operatorname{ran}(1-K)) = \infty$ gilt. Wir führen eine induktive Konstruktion durch:

Wir setzen $Y_0 := \operatorname{ran}(1-K)$. Insbesondere ist Y_0 nach (b) abgeschlossen. Wegen $\dim(E/\operatorname{ran}(1-K)) = \infty$ gibt es nach dem Lemma von Riesz 1.15 ein $y_1 \in E \setminus Y_0$ mit $\operatorname{dist}(y_1, Y_0) \geq 1/2$ und $\|y_1\| = 1$ und hierzu nach der Folgerung 6.7 aus dem Satz von Hahn–Banach ein $x_1' \in E'$ mit $x_1'|_{Y_0} \equiv 0$, $\|x_1\|_{E'} = 1$ und $x_1'(y_1) = \operatorname{dist}(y_1, Y_0) \geq 1/2$. Dann ist $Y_1 := Y_0 + \operatorname{LH}\{y_0\}$ nach Lemma 10.3 und unserer Annahme wieder ein echter abgeschlossener Unterraum von E.

Seien nun schon $y_j \in E, x_j' \in E'$ für $1 \leq j \leq n$ konstruiert derart, daß mit $Y_j := Y_0 + \operatorname{LH}\{y_1, \ldots, y_j\}$ gilt: $\|y_j\|_E = 1 = \|x_j'\|_{E'}$, $y_j \in Y_j \setminus Y_{j-1}$, $x_j'|_{Y_{j-1}} \equiv 0$ und $x_j'(y_j) = \operatorname{dist}(y_j, Y_{j-1}) \geq 1/2$ für $j = 1, \ldots, n$.

Nach unserer Annahme und Lemma 10.3 ist Y_n ein echter, abgeschlossener Untervektorraum von E. Wieder nach dem Lemma von Riesz 1.15 gibt es also ein $y_1 \in E \setminus Y_0$ mit $\operatorname{dist}(y_{n+1}, Y_n) \geq 1/2$ und $\|y_{n+1}\| = 1$ und hierzu nach der Folgerung 6.7 aus dem Satz von Hahn–Banach ein $x_{n+1}' \in E'$ mit $x_{n+1}'|_{Y_0} \equiv 0$, $\|x_{n+1}\|_{E'} = 1$ und $x_{n+1}'(y_{n+1}) = \operatorname{dist}(y_{n+1}, Y_n) \geq 1/2$.

Da K ein kompakter Operator auf E ist, ist $H := \overline{K(B_E)}$ kompakt. Die Folge der oben induktiv konstruierten stetigen linearen Funktionale x_n', $n \in \mathbb{N}$ ist auf der kompakten Menge H punktweise beschränkt und gleichgradig stetig, besitzt also nach dem Satz von Arzela–Ascoli eine auf H gleichmäßig konvergente Teilfolge $(x_{n_k}')_{k=1}^{\infty}$. Daher ist die Folge $(x_{n_k}' \circ K)_{k=1}^{\infty}$ in $(E', \|\cdot\|_{E'})$ konvergent gegen ein stetiges lineares Funktional y' auf E. Wegen $x_{n_k}'|_{\operatorname{ran}(1-K)} \equiv 0$ folgt dann auch

$$x_{n_k}' = x_{n_k}' \circ (1-K) + x_{n_k}' \circ K \to y' \qquad \text{für } k \to \infty$$

im Widerspruch dazu, daß $(x_{n_k}')_{k=1}^{\infty}$ wegen

$$\|x_{n_{k+1}}' - x_{n_k}'\|_{E'} \geq |x_{n_{k+1}}'(y_{n_k}) - x_{n_k}'(y_{n_k})| = |x_{n_k}'(y_{n_k})| \geq \frac{1}{2}$$

keine Cauchyfolge in $(E', \|\cdot\|_{E'})$ sein kann. Also war die Annahme falsch, d.h. es gilt $\operatorname{codim}(\operatorname{ran}(1-K)) < \infty$. ☐

10.7. Satz (Atkinson). *Für alle $T \in \Phi(E,F)$. $S \in \Phi(F,G)$ gilt $ST \in \Phi(E,F)$ und*

$$\operatorname{ind}(ST) = \operatorname{ind}(S) + \operatorname{ind}(T).$$

Beweis. Wir betrachten die folgenden algebraisch direkten Zerlegungen:

$$\ker(S) = (\operatorname{ran}(T) \cap \ker(S)) \oplus F_2$$

und

$$E = \ker(T) \oplus E_1 \xrightarrow{T} F = \overbrace{F_1 \oplus (\operatorname{ran}(T) \cap \ker(S))}^{\operatorname{ran}(T)} \oplus F_2 \oplus F_3 \xrightarrow{S} \overbrace{\underbrace{S(F_1)}_{\operatorname{ran}(ST)} \oplus S(F_3)}^{\operatorname{ran}(S)} \oplus G_1\,.$$

Wegen $\dim \ker(S) < \infty$ ist

$$\dim(\operatorname{ran}(T) \cap \ker(S)) = \dim \ker(S) - \dim F_2 < \infty \tag{10.2}$$

und aus der Injektivität von $S|_{F_3}$ und wegen $\operatorname{codim} \operatorname{ran}(T) < \infty$ folgt

$$\dim S(F_3) = \dim F_3 < \infty$$

und daher

$$\dim S(F_3) = \dim F_2 \oplus F_3 - \dim F_2 = \operatorname{codim} \operatorname{ran}(T) - \dim F_2\,.$$

Nun ist $T|_{E_1}$ injektiv und

$$\ker(ST) = \ker(T) \oplus \{x \in E_1\,;\, Tx \in \ker(S)\}$$

und somit

$$\dim\ker(ST) = \dim\ker(T) + \dim(\operatorname{ran}(T) \cap \ker(S)) < \infty.$$

Ferner gilt

$$\operatorname{codim}\operatorname{ran}(ST) = \dim S(F_3) + \dim G_1 = \operatorname{codim}\operatorname{ran}(T) - \dim F_2 + \operatorname{codim}\operatorname{ran}(S)\,.$$

Es folgt unter Verwendung von (10.2)

$$\begin{aligned}\operatorname{ind}(ST) &= \dim\ker(ST) - \operatorname{codim}\operatorname{ran}(ST)\\ &= \dim\ker(T) + \dim(\operatorname{ran}(T)\cap\ker(S)) - \operatorname{codim}\operatorname{ran}(T) + \dim F_2 - \operatorname{codim}\operatorname{ran}(S)\\ &= \operatorname{ind}(T) + \operatorname{ind}(S)\,.\end{aligned}$$

□

10.8. Lemma. *Für alle $A \in \mathcal{F}(E)$ ist* $\operatorname{ind}(1+A) = 0$.

Beweis. Wir zerlegen $\ker(A)$ und E algebraisch direkt in der Form $\ker(A) = E_1 \oplus (\operatorname{ran}(A) \cap \ker(A))$ und

$$E = E_1 \oplus \overbrace{\underbrace{(\operatorname{ran}(A)\cap\ker(A)) \oplus E_2}_{\operatorname{ran}(A)} \oplus E_3}^{E_4}\,.$$

Es folgt

$$(1+A)(E_4) \subseteq E_4 + A(E_4) \subseteq E_4 + \operatorname{ran}(A) \subseteq E_4\,.$$

Für alle $x \in E_1$ hat man wegen $E_1 \subseteq \ker(A)$: $(1+A)x = x + Ax = x \in E_1$ und daher $(1+A)|_{E_1} = 1_{E_1}$. Insbesondere sind E_1 und E_4 invariant unter $1+A$. Wegen der Injektivität von $A|_{E_2\oplus E_3}$ und wegen $\dim\operatorname{ran}(A) < \infty$ gilt $\dim(E_2 \oplus E_3) = \dim\operatorname{ran}(A) < \infty$. Da E_4 von endlicher Dimension und invariant unter $1+A$ ist, folgt

$$\dim\ker((1+A)|_{E_4}) = \dim(E_4/(1+A)(E_4)) = \operatorname{codim}\operatorname{ran}(1+A)$$

und daher

$$\dim\ker(1+A) = \dim\ker((1+A)|_{E_1}) + \dim\ker((1+A)|_{E_4}) = 0 + \operatorname{codim}\operatorname{ran}(1+A),$$

also $\operatorname{ind}(1+A) = 0$. □

Im folgenden Satz zeigen wir, daß die Fredholmoperatoren gerade die stetigen linearen Operatoren sind, die modulo der Operatoren von endlich dimensionalem Rang invertierbar sind.

10.9. Satz. *Für $T \in \mathcal{L}(E,F)$ sind die folgenden drei Aussagen äquivalent:*

(a) *T ist Fredholmoperator.*

(b) *Es gibt $L, R \in \Phi(F,E)$ und $A_1 \in \mathcal{F}(E)$, $A_2 \in \mathcal{F}(F)$ mit*

$$LT = 1_E - A_1\,, \qquad TR = 1_F - A_2\,. \tag{10.3}$$

(c) *Es gibt $L, R \in \mathcal{L}(F,E)$ und $A_1 \in \mathcal{F}(E)$, $A_2 \in \mathcal{F}(F)$ mit* (10.3).

Beweis. "(a)$\Longrightarrow$(b)": Sei also $T \in \Phi(E,F)$. Nach dem Kato–Lemma 10.2 gibt es eine Projektion $P = P^2 \in \mathcal{L}(F)$ mit $\operatorname{ran}(P) = \operatorname{ran}(T)$ und $\dim\operatorname{ran}(1-P) = \operatorname{codim}\operatorname{ran}(T)$. Wegen $\dim\ker(T) < \infty$ gibt es nach Satz 6.10 auch eine Projektion $Q = Q^2 \in \mathcal{L}(E)$ mit $\operatorname{ran}(Q) = \ker(T)$. Insbesondere ist $E_1 := \ker(Q) = \operatorname{ran}(1_E - Q)$ ein abgeschlossener Untervektorraum von E und es ist $E = \ker(T) \oplus E_1$. Die Restriktion $T|_{E_1}$ ist also injektiv und $T(E_1) = \operatorname{ran}(T)$ ist abgeschlossen. Nach dem Satz 5.7 von der inversen Abbildung existiert also $S \in \mathcal{L}(\operatorname{ran}(T), E_1)$ mit $ST|_{E_1} = 1_{E_1}$ und $TS = 1_{\operatorname{ran}(T)}$. Mit $R := L := SP : F \to E$ folgt

$$\operatorname{ran}(L) = \operatorname{ran}(R) = E_1, \quad \operatorname{codim}\operatorname{ran}(L) = \operatorname{codim}\operatorname{ran}(R) = \dim E/E_1 = \dim\ker(T) < \infty$$

sowie

$$\begin{aligned}\ker(R) = \ker(L) &= \operatorname{ran}(1_F - P),\\ \dim\ker(R) = \dim\ker(L) &= \dim\operatorname{ran}(1_F - P) = \operatorname{codim}\operatorname{ran}(T) < \infty.\end{aligned}$$

Also gilt $R = L \in \Phi(F, E)$ und $\operatorname{ind}(R) = \operatorname{ind}(L) = -\operatorname{ind}(T)$. Ferner hat man

$$\begin{aligned}LT &= SPT = ST(1_E - Q) + STQ = 1_E - Q,\\ TR &= TSP = P = 1_F - (1_F - P)\end{aligned}$$

mit $Q \in \mathcal{F}(E)$, $1_F - P \in \mathcal{F}(F)$.

"(b)$\Longrightarrow$(c)" ist offensichtlich.

"(c)$\Longrightarrow$(a)": Aus der Voraussetzung in (c) folgt für $x \in E$:

$$LTx = 0 \quad \Longleftrightarrow x = A_1 x$$

und damit

$$\ker(T) \subseteq \ker(LT) \subseteq \operatorname{ran}(A_1) \quad \text{also } \dim\ker(T) \le \dim\operatorname{ran}(A_1) < \infty.$$

Wegen $TR = 1_F - A_2$ ist

$$F = \operatorname{ran}(1_F) \subseteq \operatorname{ran}(TR) + \operatorname{ran}(A_2) \subseteq F$$

und daher $\operatorname{codim}\operatorname{ran}(T) \le \operatorname{codim}\operatorname{ran}(TR) \le \dim\operatorname{ran}(A_2) < \infty$. Also ist T ein Fredholmoperator. $\square$

Aus Satz 10.7 und Lemma 10.8 erhalten wir unmittelbar:

10.10. Folgerung. *Ist $T \in \Phi(E, F)$ und sind L, R, A_1, A_2 wie in Satz 10.9 (b), so gilt* $\operatorname{ind}(L) = \operatorname{ind}(R) = -\operatorname{ind}(T)$.

10.11. Satz (Satz von der Stabilität des Indexes). *Seien E, F unendlich dimensionale Banachräume. Für alle $n \in \mathbb{Z}$ ist die Menge $\Phi_n(E, F)$ offen in $\mathcal{L}(E, F)$. Insbesondere ist also auch $\Phi(E, F)$ offen und die Abbildung* $\operatorname{ind} : \Phi(E, F) \to \mathbb{Z}$ *ist stetig.*

Beweis. Sei $T \in \Phi_n(E, F)$ beliebig. Nach Satz 10.9 und der anschließenden Folgerung gibt es dann $L, R \in \Phi_{-n}(E, F)$ und $A_1 \in \mathcal{F}(E)$, $A_2 \in \mathcal{F}(F)$ mit $LT = 1_E - A_1$ und $TR = 1_F - A_2$. Insbesondere ist

$$d := \min\{\|L\|^{-1}, \|R\|^{-1}\} > 0.$$

Sei nun $S \in \mathcal{L}(E, F)$ beliebig mit $\|S\| < d$. Dann ist $\|LS\| < 1$ und $\|RS\| < 1$. Nach Lemma 7.6 sind die Operatoren $1_E + LS$ in $\mathcal{L}(E)$ und $1_F + SR$ in $\mathcal{L}(F)$ invertierbar, also bijektiv und insbesondere Fredholmsch vom Index 0. Ferner gilt

$$L(T + S) = 1_E - A_1 + LS\,, \quad (T + S)R = 1_F - A_2 + SR\,.$$

Multiplikation von links mit $(1_E + LS)^{-1}$ bzw. von rechts mit $(1_F + SR)^{-1}$ ergibt

$$\underbrace{(1_E + LS)^{-1}L}_{=:\tilde{L}\in\mathcal{L}(F,E)}(T + S) = 1_E - \underbrace{(1_E + LS)^{-1}A_1}_{=:\tilde{A}_1\in\mathcal{F}(E)}.$$

bzw.

$$(T + S)\underbrace{R(1_F + SR)^{-1}}_{=:\tilde{R}\in\mathcal{L}(F,E)} = 1_F - \underbrace{A_2R(1_F + SR)^{-1}}_{=:\tilde{A}_2\in\mathcal{F}(F)}.$$

Nach Satz 10.9 ist $T+S$ also ein Fredholmoperator und mit Satz 10.7 und Lemma 10.8 folgt aus der letzten Gleichung

$$0 = \operatorname{ind}\big((T+S)R(1+SR)^{-1}\big) = \operatorname{ind}(T+S)+\operatorname{ind}(R)+\operatorname{ind}((1+SR)^{-1}) = \operatorname{ind}(T+S)-n+0$$

und daher $\operatorname{ind}(T+S) = n$, d.h. $T+S \in \Phi_n(E,F)$. □

10.12. Folgerung. *Sei X ein zusammenhängender topologischer Hausdorffraum und sei $T(\cdot) : X \to \Phi(E,f)$ stetig. Dann ist $t \mapsto \operatorname{ind}(T(t))$ konstant auf X.*

Beweis. Nach dem Stabilitätssatz 10.11 ist die Abbildung $t \mapsto \operatorname{ind}(T(t))$ als Hintereinanderausführung von stetigen Abbildungen eine stetige Abbildung von X nach $\mathbb{Z}$. Da X zusammenhängend ist, ist auch $\{\operatorname{ind}(T(t))\,;\, t \in X\}$ eine zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{Z}$, also nur aus einem Punkt bestehend. □

10.13. Folgerung. *Für alle $K \in \mathcal{L}(E)$ ist* $\operatorname{ind}(1_E + K) = 0$.

Beweis. Mit K ist für $0 \le t \le 1$ auch der Operator $-tK$ kompakt. Nach Satz 10.6 ist also für alle $t \in [0,1]$ der Operator $T(t) := 1_E + tK$ ein Fredholmoperator. Da die Abbildung $T(\cdot) : [0,1] \to \mathcal{L}(E)$ stetig ist und $[0,1]$ zusammenhängend ist, folgt nach Folgerung 10.12: $\operatorname{ind}(T+K) = \operatorname{ind}(T(1)) = \operatorname{ind}(T(0)) = \operatorname{ind}(1_E) = 0$. □

10.14. Satz. *Sei $K \in \mathcal{K}(E)$ und $T := 1_E - K$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \ge n_0$ gilt:*

$$\ker(T^n) = \ker(T^{n_0}), \qquad \operatorname{ran}(T^n) = \operatorname{ran}(T^{n_0}).$$

Beweis. Offensichtlich gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\ker(T^n) \subseteq \ker(T^{n+1}), \qquad \operatorname{ran}(T^n) \supseteq \operatorname{ran}(T^{n+1}).$$

Annahme: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\ker(T^n) \subsetneq \ker(T^{n+1})$. Da $\ker(T^n)$ abgeschlossen ist, gibt es nach dem Lemma von Riesz 1.15 zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in \ker(T^{n+1})$ mit $\|x_n\| = 1$ und

$$\operatorname{dist}(x_n, \ker(T^n)) = \inf\{\|x_n - x\|\,;\, x \in \ker(T^n)\} \ge \frac{1}{2}\,.$$

Wegen $Tx_m + x_n - Tx_n \in \ker(T^m)$ für alle $m > n$ folgt

$$\|Kx_m - Kx_n\| = \|x_m - (Tx_m + x_n - Tx_n)\| \ge \inf\{\|x_n - x\|\,;\, x \in \ker(T^m)\} \ge \frac{1}{2}$$

im Widerspruch dazu, daß die Folge $(Kx_n)_{n=1}^\infty$ wegen der Kompaktheit von K und der Beschränktheit der Folge $(x_n)_{n=1}^\infty$ eine konvergente Teilfolge besitzen muß. Die Annahme war also falsch. Es gibt daher ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\ker(T^{n_0}) = \ker(T^{n_0+1})$. Für $x \in \ker(T^{n_0+2})$ ist $Tx \in \ker(T^{n_0+1}) = \ker(T^{n_0})$ und somit $x \in \ker(T^{n_0+1}) = \ker(T^{n_0})$. Durch vollständige Induktion folgt $\ker(T^n) = \ker(T^{n_0})$ für alle $n \ge n_0$. Insbesondere gilt also für alle $n \ge n_0$: $\dim\ker(T^n) = \dim\ker(T^{n_0})$. Mit Folgerung 10.13 und Satz 10.7 erhält man für alle $n \in \mathbb{N}$

$$0 = n\operatorname{ind}(T) = \operatorname{ind}(T^n) = \dim\ker(T^n) - \operatorname{codim}\operatorname{ran}(T^n)$$

und daher für alle $n \ge n_0$:

$$\operatorname{codim}\operatorname{ran}(T^n) = \operatorname{codim}\operatorname{ran}(T^{n_0}) < \infty.$$

Hieraus folgt $\operatorname{ran}(T^n) = \operatorname{ran}(T^{n_0})$ für alle $n \ge n_0$. □

10.15. Lemma. *Sei X ein $\mathbb{K}$–Vektorraum und sei $T : X \to X$ eine lineare Abbildung, so daß für ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und alle $n \ge n_0$ gilt*

$$\ker(T^n) = \ker(T^{n_0}), \qquad \operatorname{ran}(T^n) = \operatorname{ran}(T^{n_0}). \tag{10.4}$$

Dann gilt

(a) $X = \ker(T^{n_0}) \oplus \operatorname{ran}(T^{n_0})$.

(b) *$T(\ker(T^{n_0})) \subseteq \ker(T^{n_0})$ und $T(\operatorname{ran}(T^{n_0})) \subseteq \operatorname{ran}(T^{n_0})$.*
(c) *$T|_{\operatorname{ran}(T^{n_0})}$ ist ein Isomorphismus von $\operatorname{ran}(T^{n_0})$ auf sich.*

BEWEIS. (a) Ist $x \in \ker(T^{n_0}) \cap \operatorname{ran}(T^{n_0})$, so gibt es ein $y \in X$ mit $T^{n_0}y = x$. Wegen $0 = T^{n_0}x = T^{2n_0}y$ folgt $y \in \ker(T^{2n_0}) = \ker(T^{n_0})$ und daher $x = T^{n_0}y = 0$. Also ist $\ker(T^{n_0}) \cap \operatorname{ran}(T^{n_0}) = \{0\}$.

Zu zeigen ist noch $X = \ker(T^{n_0}) + \operatorname{ran}(T^{n_0})$. Sei also $x \in X$ beliebig. Wegen $\operatorname{ran}(T^{n_0}) = \operatorname{ran}(T^{2n_0})$ gibt es zu $y := T^{n_0}x$ ein $u \in X$ mit $y = T^{2n_0}u$. Wegen

$$T^{n_0}(x - T^{n_0}u) = T^{n_0}x - T^{2n_0}u = y - y = 0$$

folgt $x = (x - T^{n_0}u) + T^{n_0}u \in \ker(T^{n_0}) + \operatorname{ran}(T^{n_0})$.

(b) ist offensichtlich.

(c) Ist $x \in \ker(T) \cap \operatorname{ran}(T^{n_0})$, so gibt es ein $y \in X$ mit $T^{n_0}y = x$ und es folgt $0 = Tx = T^{n_0+1}y$, d.h. $y \in \ker(T^{n_0+1}) = \ker(T^{n_0})$ und somit $x = T^{n_0}y = 0$. Die lineare Abbildung $T|_{\operatorname{ran}(T^{n_0})}$ ist also injektiv.

Wegen $T(\operatorname{ran}(T^{n_0})) = \operatorname{ran}(T^{n_0+1}) = \operatorname{ran}(T^{n_0})$ ist $T|_{\operatorname{ran}(T^{n_0})}$ auch surjektiv. □

10.16. LEMMA. *Ist $T \in \Phi(E)$ mit (10.4), so ist die Zerlegung $E = \ker(T^{n_0}) \oplus \operatorname{ran}(T^{n_0})$ auch topologisch direkt. Die kanonische Projektion P von E auf $\operatorname{ran}(T^{n_0})$ mit $\ker(P) = \ker(T^{n_0})$ ist also stetig. $T|_{\operatorname{ran}(T^{n_0})}$ ist dann ein topologischer Isomorphismus von $\operatorname{ran}(T^{n_0})$ auf sich.*

BEWEIS. Nach dem Satz von der inversen Abbildung ist $T|_{\operatorname{ran}(T^{n_0})}$ als stetiger Isomorphismus von $\operatorname{ran}(T^{n_0})$ auf sich auch ein topologischer Isomorphismus. Die Abbildung $P := (T|_{\operatorname{ran}(T^{n_0})})^{-1} \circ T^{n_0}$ ist also stetig von E auf $\operatorname{ran}(T^{n_0})$ und erfüllt $P^2 = P$ und $\ker(P) = \ker(T^{n_0})$. □

10.17. SATZ. *Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein Banachraum über $\mathbb{C}$ und sei $K \in \mathcal{K}(E)$. Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ sei $T_\lambda := \lambda 1_E - K$. Dann gilt:*

(a) *Für alle $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ ist T_λ ein Fredholmoperator vom Index 0. Insbesondere ist T_λ genau dann injektiv, wenn T_λ surjektiv ist.*
(b) *Zu jedem $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit*

$$\ker(T_\lambda^n) = \ker(T_\lambda^{n_0}) \quad \textit{und} \quad \operatorname{ran}(T_\lambda^n) = \operatorname{ran}(T_\lambda^{n_0}) \quad \textit{für alle } n \geq n_0. \tag{10.5}$$

(c) *$\sigma_{\mathcal{L}(E)}(K) \setminus \{0\}$ ist höchstens abzählbar mit höchstens 0 als Häufungspunkt und besteht nur aus Eigenwerten von K.*

BEWEIS. Für $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ ist $T_\lambda = \lambda\bigl(1_E - \frac{1}{\lambda}K\bigr)$ und $\ker(T_\lambda^n) = \ker\bigl(\bigl(1_E - \frac{1}{\lambda}K\bigr)^n\bigr)$ sowie $\operatorname{ran}(T_\lambda^n) = \operatorname{ran}\bigl(\bigl(1_E - \frac{1}{\lambda}K\bigr)^n\bigr)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit K ist auch $\pm\frac{1}{\lambda}K$ ein kompakter Operator. (a) folgt also aus Folgerung 10.13 und (b) aus Satz 10.14.

Zu (c): Wegen (a) besteht $\sigma_{\mathcal{L}(E)}(K) \setminus \{0\}$ nur aus Eigenwerten von K. Ist $0 \neq \lambda \in \sigma_{\mathcal{L}(E)}(K)$, so gibt es nach (b) ein n_0 mit (10.5). Nach Lemma 10.15 und Lemma 10.16 ist $E = \ker(T_\lambda^{n_0}) \oplus \operatorname{ran}(T_\lambda^{n_0})$, wobei die Zerlegung topologisch direkt ist und $T_\lambda|_{\operatorname{ran}(T_\lambda^{n_0})}$ ein topologischer Isomorphismus von $E_2 := \operatorname{ran}(T_\lambda^{n_0})$ auf sich ist. Insbesondere ist E_2 invariant unter T_λ also auch unter K und $\lambda \notin \sigma_{\mathcal{L}(E_2)}(K|_{E_2})$. Da $\sigma_{\mathcal{L}(E_2)}(K|_{E_2})$ kompakt ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(\lambda) \cap \sigma_{\mathcal{L}(E_2)}(K|_{E_2}) = \emptyset$. Da T_λ ein Fredholmoperator ist, ist $E_1 := \ker(T_\lambda^{n_0})$ ein endlich dimensionaler Unterraum von E, der nach Lemma 10.15 invariant ist unter T_λ also auch unter K. Da E_1 endlich dimensional ist, besteht $\sigma_{\mathcal{L}(E_1)}(K|_{E_1})$ nur aus endlich vielen Punkten. Insbesondere gibt es ein $\eta > 0$ mit $U_\eta(\lambda) \cap \sigma_{\mathcal{L}(E_1)}(K|_{E_1}) = \{\lambda\}$. Mit $\varepsilon := \min\{\delta, \eta\}$ folgt nach Aufgabe 10.1: $U_\varepsilon(\lambda) \cap \sigma_{\mathcal{L}(E)}(K) = \{\lambda\}$. Jeder Punkt $\lambda \in \sigma_{\mathcal{L}(E)}(K) \setminus \{0\}$ ist also ein isolierter Punkt des Spektrums. $\sigma_{\mathcal{L}(E)}(K)$ kann daher höchstens 0 als Häufungspunkt haben. □

10.18. SATZ. *Seien $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ zwei Banachräume.*

(a) *Ist* $T \in \Phi(E,F)$ *und* $K \in \mathcal{K}(E,F)$, *so ist* $T+K \in \Phi(E,F)$ *und* $\operatorname{ind}(T+K) = \operatorname{ind}(T)$.

(b) *Ein Operator* $T \in \mathcal{L}(E,F)$ *ist genau dann ein Fredholmoperator, wenn es kompakte Operatoren* $K_1 \in \mathcal{K}(E)$, $K_2 \in \mathcal{K}(F)$ *und stetige lineare Operatoren* $L, R \in \mathcal{L}(F,E)$ *gibt mit*

$$LT = 1_E - K_1\,, \qquad TR = 1_F - K_2\,.$$

Beweis. (a) Nach Satz 10.9 und der daran anschließenden Folgerung gibt es $L_1, R_1 \in \Phi(F,E)$ und $A_1 \in \mathcal{F}(E)$, $A_2 \in \mathcal{F}(F)$ mit $\operatorname{ind}(L) = \operatorname{ind}(R) = -\operatorname{ind}(T)$, $L_1 T = 1_E - A_1$ und $TR_1 = 1_F - A_2$. Es folgt

$$L_1(T+K) = 1_F - A_2 + L_1 K\,, \qquad (T+K)R_1 = 1_F - A_2 + KR_1\,.$$

Da die Operatoren $K_1 := -A_1 + L_1 K$ und $K_2 := -A_2 + KR_1$ kompakt sind, folgt $L_1(T+K) \in \Phi(E)$ und $(T+K)R_1 \in \Phi(F)$ sowie $\operatorname{ind}(L_1(T+K)) = \operatorname{ind}((T+K)R_1) = 0$ (nach Folgerung 10.13). Also gibt es (wiederum nach Satz 10.9) Operatoren $L_2 \in \Phi(E)$, $B_1 \in \mathcal{F}(E)$, $R_2 \in \Phi(F)$, $B_2 \in \mathcal{F}(F)$ mit $\operatorname{ind}(L_2) = \operatorname{ind}(R_2) = 0$ und

$$L_2 L_1 (T+K) = 1_E - B_1\,, \qquad (T+K)R_1 R_2 = 1_F - B_2\,.$$

Nach Satz 10.9 ist also $T+K \in \Phi(E,F)$ und mit Satz 10.7 in Verbindung mit Lemma 10.8 folgt

$$0 = \operatorname{ind}(L_2 L_1(T+K) = \operatorname{ind}(L_2) + \operatorname{ind}(L_1) + \operatorname{ind}(T+K) = 0 - \operatorname{ind}(T) + \operatorname{ind}(T+K),$$

also $\operatorname{ind}(T+K) = \operatorname{ind}(T)$.

(b) "$\Longrightarrow$" folgt aus Satz 10.9 (da stetige lineare Operatoren von endlichem Rang insbesondere kompakte Operatoren sind).

"$\Longleftarrow$": Sind L, R, K_1, K_2 wie in (b), so ist $LT = 1_E - K_1 \in \Phi(E)$, $TR = 1_F - K_2 \in \Phi(F)$ nach Folgerung 10.13. Nach Satz 10.9 gibt es daher Operatoren $L_1 \in \mathcal{L}(E)$, $R_1 \in \mathcal{L}(F)$, $A_1 \in \mathcal{F}(E)$ und $A_2 \in \mathcal{F}(F)$ mit

$$L_1 LT = 1_E - A_1\,, \qquad TRR_1 = 1_F - A_2\,.$$

Nach Satz 10.9 folgt $T \in \Phi(E,F)$. □

10.19. Folgerung. *Sei* $(E, \|\cdot\|)$ *ein Banachraum. Genau dann ist ein Operator* $T \in \mathcal{L}(E)$ *ein Fredholmoperator, wenn seine Restklasse* $T+\mathcal{K}(E)$ *in der Quotientenalgebra* $\mathcal{Q}(E) := \mathcal{L}(E)/\mathcal{K}(E)$ *von* $\mathcal{L}(E)$ *nach dem abgeschlossenen zweiseitigen Ideal* $\mathcal{K}(E)$ *der kompakten Operatoren invertierbar ist.*

$\mathcal{Q}(E)$ nennt man auch die *Calkin–Algebra* von E. Versehen mit ihrer Quotientennorm ist $\mathcal{Q}(E)$ wieder eine Banachalgebra. Ist also E ein unendlichdimensionaler komplexer Banachraum (und daher $\mathcal{Q}(E) \neq \{0\}$), so ist für alle $T \in \mathcal{L}(E)$ das Spektrum

$$\sigma_e(T) := \sigma_{\mathcal{Q}(E)}(T + \mathcal{K}(E))$$

der Restklasse von T in $\mathcal{Q}(E)$ eine kompakte nicht leere Menge, welche offensichtlich in $\sigma_{\mathcal{L}(E)}(T)$ enthalten ist. Man nennt $\sigma_e(T)$ das *wesentliche Spektrum* von T.

10.20. Folgerung. *Sei* $(E, \|\cdot\|)$ *ein unendlichdimensionaler komplexer Banachraum und* $T \in \mathcal{L}(E)$. *Dann ist* $\operatorname{ind}(\lambda - T)$ *auf jeder Zusammenhangskomponente von* $\mathbb{C} \setminus \sigma_e(T)$ *konstant. Bezeichnet* Ω_0 *die unbeschränkte Zusammenhangskomponente von* $\mathbb{C} \setminus \sigma_e(T)$, *so sind alle Punkte aus* $\sigma_{\mathcal{L}(E)}(T) G \cap \Omega_0$ *Eigenwerte von* T.

Übungsaufgaben zu Kapitel 10.

10.1. Aufgabe. Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein komplexer Banachraum und $E = E_1 \oplus E_2$ mit abgeschlossenen Unterräumen E_1 und E_2 von E. Zeigen Sie: Ist $T \in \mathcal{L}(E)$ mit $T(E_j) \subseteq E_j$ für $j = 1, 2$, so ist $\sigma_{\mathcal{L}(E)}(T) = \sigma_{\mathcal{L}(E_1)}(T|_{E_1}) \cup \sigma_{\mathcal{L}(E_2)}(T|_{E_2})$.

10.2. Aufgabe. Seien $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ zwei Banachräume. Zeigen Sie:

(a) Ist $A \in \mathcal{F}(E, F)$ so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und $x_1', \ldots, x_n' \in E'$, $y_1, \ldots, y_n \in F$ mit
$$Ax = \sum_{j=1}^{n} x_j'(x) y_j \quad \text{für alle } x \in E.$$
(b) Ist $A \in \mathcal{F}(E, F)$, so ist $A' \in \mathcal{F}(F', E')$.
(c) Ist $T \in \Phi(E, F)$, so ist $T' \in \Phi(F', E')$ und $\operatorname{ind}(T') = -\operatorname{ind}(T)$.

10.3. Aufgabe. Seien $a_0, a_1, \ldots, a_n \in C([0, 1])$ und sei $h \in C([0, 1] \times [0, 1])$. Zeigen Sie: Der durch
$$(Tf)(t) := f^{(n+1)}(t) + \sum_{j=0}^{n} a_j(t) f^{(j)}(t) + \int_0^1 h(s, t) f^{(n+1)}(s) ds \quad (f \in C^{(n+1)}([0, 1]),\ t \in [0, 1])$$
definierte Operator $T : C^{(n+1)}([0, 1]) \to C([0, 1])$ ist ein Fredholmoperator. Berechnen Sie $\operatorname{ind}(T)$.

10.4. Aufgabe. Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und sei $T \in \mathcal{L}(E)$. Zeigen Sie: Ist $T^n \in \mathcal{K}(E)$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so ist $\lambda 1_E - T$ für alle $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ein Fredholmoperator vom Index 0.

10.5. Aufgabe. Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Ein Operator $T \in \mathcal{L}(E)$ heißt *Riesz–Operator* falls die Restklasse $T + \mathcal{K}(E)$ von T in $\mathcal{Q}(E) = \mathcal{L}(E)/\mathcal{K}(E)$ quasinilpotent ist.

(a) Zeigen Sie: $T \in \mathcal{L}(E)$ ist genau dann ein Riesz–Operator, wenn für alle $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ der Operator $T_\lambda := \lambda 1_E - T$ ein Fredholmoperator vom Index 0 ist.
(b) Geben Sie ein Beispiel eines Riesz–Operators $T \in \mathcal{L}(E)$ an, der kein kompakter Operator ist.

KAPITEL 11

Lokalkonvexe Vektorräume

In einer Reihe von Situationen reicht der bisher verwendete Begriff des normierten Raums nicht aus. So läßt sich etwa der Begriff der punktweisen Konvergenz einer Folge von Funktionen auf einer nicht endlichen Menge nicht auf eine Konvergenz im Sinne einer Norm zurückführen. Insbesondere benötigen wir eine geeignete Topologie auf dem topologischen Dualraum eines normierten Raumes, für die der Konvergenzbegriff gerade der Begriff der punktweisen Konvergenz ist.

11.1. DEFINITION. Eine Topologie τ auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum E (mit wie stets in dieser Vorlesung $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), für die die Addition $+ : E \times E \to E$ und die Multiplikation mit Skalaren $\cdot : \mathbb{K} \times E \to E$ (bezüglich der Produkttopologien auf $E \times E$ bzw. $\mathbb{K} \times E$) stetig sind heißt eine *Vektorraumtopologie* auf E. Ist E mit einer Vektorraumtopologie τ versehen, so nennen wir (E, τ) einen *topologischen Vektorraum.*

Eine bijektive lineare Homöomorphie $T : E_1 \to E_2$ zwischen zwei topologischen Vektorräumen $(E_1, \tau_1), (E_2, \tau_2)$ nennt man wieder einen *topologischen Isomorphismus*. Die Räume $(E_1, \tau_1), (E_2, \tau_2)$ heißen dann zu einander *topologisch isomorph.* Zueinander topologisch isomorphe topologische Vektorräume werden im Rahmen der Theorie der topologischen Vektorräume als nicht wesentlich verschieden angesehen.

Genau dann ist eine Topologie τ auf E eine Vektorraumtopologie, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(U1) Zu je zwei Punkten $x, y \in E$ und jeder Umgebung U von $x+y$ gibt es Umgebungen V von x und W von y mit $V + W \subseteq U$. (Dies ist äquivalent zur Stetigkeit der Addition).

(U2) Zu jedem $x \in E$, jedem $\lambda \in \mathbb{K}$ und jeder Umgebung U von λx gibt es eine Umgebung V von x und ein $\varepsilon > 0$ mit $\{\mu y\,;\, |\mu - \lambda| < \varepsilon, y \in V\} \subseteq U$. (Dies ist äquivalent zur Stetigkeit der Multiplikation mit Skalaren in allen Punkten $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$).

11.2. BEMERKUNGEN. Sei (E, τ) ein topologischer Vektorraum.

(a) Für alle $y \in E$, $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$ sind (wegen der Stetigkeit der Addition) die Translation

$$T_y : E \to E\,, \qquad x \mapsto x + y$$

und (wegen der Stetigkeit der Multiplikation) die Streckung

$$M_\lambda : E \to E\,, \qquad x \mapsto \lambda x$$

Homöomorphien. Insbesondere ist also M_λ ein topologischer Isomorphismus von (E, τ) auf sich.

(b) Zu jeder Nullumgebung U in E gibt es eine Nullumgebung V in E mit $V + V \subseteq U$.

BEWEIS. Zu (b): Wegen der Stetigkeit der Multiplikation in $(0, 0)$ gibt es nach (U1) zu U Nullumgebungen W_1, W_2 mit $W_1 + W_2 \subseteq U$. Mit W_1, W_2 ist auch $V := W_1 \cap W_2$ als endlicher Durchschnitt von Nullumgebungen wieder eine Nullumgebung. Diese erfüllt $V + V \subseteq W_1 + W_2 \subseteq U$. □

11.3. DEFINITION. Eine Teilmenge M eines $\mathbb{K}$–Vektorraums E heißt

- *konvex*, falls gilt: $\forall x, y \in M\ \forall \alpha \in [0,1]$: $\alpha x + (1-\alpha)y \in M$.
- *absolutkonvex*, falls gilt: $\forall x, y \in E\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$: $|\alpha| + |\beta| \leq 1 \Longrightarrow \alpha x + \beta y \in M$.
- *kreisförmig*, falls gilt: $\forall x \in M\ \forall \alpha \in \mathbb{K}$: $|\alpha| \leq 1 \Longrightarrow \alpha x \in M$.
- *absorbant*, falls $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nM$.

11.4. Lemma. *Sei K eine nicht leere Teilmenge eines $\mathbb{K}$–Vektorraums E.*

(a) *K ist genau dann absolutkonvex, wenn K konvex und kreisförmig ist.*

(b) *Ist K absolutkonvex und absorbant, so ist durch*

$$p_K(x) := \inf\{r > 0\,;\, x \in rK\}\,, \qquad (x \in E)$$

eine Halbnorm $p_K : E \to [0,\infty)$ gegeben. p_K heißt das Minkowski–Funktional zu K

(c) *Ist $p : E \to [0,\infty)$ eine Halbnorm auf E, so sind die Mengen*

$$B_p := \{x \in E\,;\, p(x) \leq 1\} \qquad \text{und} \qquad D_p := \{x \in E\,;\, p(x) < 1\}$$

absorbant und absolutkonvex und es gilt $p_{D_p} = p_{B_p} = p$.

(d) *Ist K wie in (a), so gilt $D_{p_K} \subseteq K \subseteq B_{p_K}$.*

Beweis. (a) rechnet man unmittelbar nach.

(b) Da K absorbant ist, gibt es zu jedem $x \in E$ ein $r > 0$ mit $x \in rK$. Also ist $p(x) \in [0,\infty)$. Da K absolutkonvex ist, ist $0 \in rK$ für alle $r > 0$ und somit $p(0) = 0$ sowie $p(0x) = p(0) = 0 = 0p(x)$.

Für alle $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$, $x \in E$ gilt (da K nach (a) kreisförmig ist):

$$\begin{aligned} p_K(\lambda x) =& \inf\{r > 0\,;\, \lambda x \in rK\} = |\lambda| \inf\{s > 0\,;\, \lambda x \in |\lambda| sK\} \\ =& |\lambda| \inf\{s > 0\,;\, x \in s\frac{|\lambda|}{\lambda}K\} = |\lambda| \inf\{s > 0\,;\, x \in sK\} = |\lambda| p_K(x). \end{aligned}$$

Für alle $x, y \in E$ gilt wegen der Absolutkonvexität von K:

$$\begin{aligned} p_K(x+y) =& \inf\{r > 0\,;\, x + y \in rK\} \\ =& \inf\{s + t\,;\, s > 0, t > 0, x + y \in (s+t)K = sK + tK\} \\ \leq& \inf\{s + t\,;\, s > 0, t > 0, x \in sK, y \in tK\} \\ =& \inf\{s\,;\, s > 0, t > 0, x \in sK\} + \inf\{t\,;\, t > 0, y \in tK\} = p_K(x) + p_K(y). \end{aligned}$$

p_K erfüllt also auch die Dreiecksungleichung.

(c) rechnet man unmittelbar nach und (d) ist offensichtlich. □

Wir erinnern an einige Definitionen aus der Topologie:

Definition. Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $x \in X$. Eine Familie $\mathfrak{B}(x) \subset \mathfrak{U}(x)$ von Umgebungen von x heißt *Umgebungsbasis für x*, falls es zu jeder Umgebung $U \in \mathfrak{U}(x)$ ein $V \in \mathfrak{B}(x)$ gibt mit $V \subseteq U$.

Ist für jedes $x \in X$ eine Umgebungsbasis $\mathfrak{B}(x)$ für x gegeben, so nennt man $\mathfrak{B} := \{\mathfrak{B}(x); x \in X\}$ eine *Umgebungsbasis von (X, τ)*.

Beispiele. (a) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Für alle $x \in X$ ist dann $\mathfrak{B}(x) := \{U_{\frac{1}{n}}(x); n \in \mathbb{N}\}$ eine Umgebungsbasis von x (bzgl. der durch d auf X gegebenen Topologie τ_d).

(b) Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $x \in X$. Dann ist $\mathfrak{B}(x) := \{G \in \tau; x \in G\}$ eine Umgebungsbasis für x.

Wir sagen: Ein topologischer Raum (X, τ) genügt dem *ersten Abzählbarkeitsaxiom*, falls jeder Punkt aus X eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt. Beispiel (a) besagt also insbesondere, daß jeder metrische Raum dem ersten Abzählbarkeitsaxiom genügt.

Bemerkungen. Sei (X, τ) ein topologischer Raum.

(a) Sei $\mathfrak{B}(x)$ eine Umgebungsbasis für $x \in X$. Dann erhält man das Umgebungssystem $\mathfrak{U}(x)$ von x durch: $\mathfrak{U}(x) = \{U \subset X \; ; \; \exists \, V \in \mathfrak{B}(x) : V \subset U\}$.

(b) Ist $\mathfrak{B}$ eine Umgebungsbasis von offenen Mengen in (X, τ), so ergeben sich aus den Umgebungseigenschaften die Aussagen:

(B1) $\forall \, x \in X : \mathfrak{B}(x) \neq \emptyset$ und $x \in V$ für alle $V \in \mathfrak{B}(x)$.

(B2) $\forall \, V_1, V_2 \in \mathfrak{B}(x) \; \exists \, V \in \mathfrak{B}(x) : V \subset V_1 \cap V_2$.

(B3) Ist $y \in V \in \mathfrak{B}(x)$, so existiert $W \in \mathfrak{B}(y)$ mit $W \subset V$.

(c) Umgekehrt gilt: Ist für jedes Element x einer Menge X eine Familie $\mathfrak{B}(x)$ von Teilmengen von X gegeben, so daß (B1) – (B3) erfüllt sind, so gibt es genau eine Topologie τ auf X, für die $\mathfrak{B} := \{\mathfrak{B}(x); x \in X\}$ eine Umgebungsbasis von (X, τ) ist, die aus τ–offenen Mengen besteht.

Beweis als Übung.

11.5. Bemerkung. Sei (E, τ) ein topologischer Vektorraum. Dann gilt:

(a) Jede Nullumgebung U in (E, τ) enthält eine kreisförmige Nullumgebung.

(b) Jede Nullumgebung U in (E, τ) ist absorbant.

(c) Ist $\mathfrak{U}(0)$ eine Nullumgebungsbasis von (E, τ), so ist $\mathfrak{U} := \{x + U \, ; \, U \in \mathfrak{U}(0)\}$ eine Umgebungsbasis für τ.

Beweis. (a) Wegen der Stetigkeit der Multiplikation gibt es zu jeder Nullumgebung U eine Nullumgebung V und ein $\varepsilon > 0$ mit

$$W := \{\lambda x \, ; \, |\lambda| \leq \varepsilon\} \subseteq U.$$

W ist offensichtlich kreisförmig. Da mit V nach Bemerkung 11.2 auch $\varepsilon V \subseteq W$ eine Nullumgebung ist, ist W eine Nullumgebung in (E, τ).

(b) Sei U eine beliebige Nullumgebung in (E, τ) und sei $x \in E$ beliebig. Wegen der Stetigkeit der Multiplikation in $(0, x)$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $\frac{1}{r} x \in U$ (und somit $x \in rU$) für alle $r > \frac{1}{\varepsilon}$.

(c) Dies gilt, da nach Bemerkung 11.2 für alle $x \in E$ die Translation $u \mapsto x + u$ eine Homöomorphie von (E, τ) auf sich ist. □

11.6. Definition. Ein topologischer Vektorraum (E, τ) heißt *lokalkonvex*, falls jeder Punkt $x \in E$ eine Umgebungsbasis aus konvexen Mengen besitzt. Die Topologie τ heißt dann eine *lokalkonvexe Topologie* auf E.

11.7. Lemma. *Für einen topologischen Vektorraum (E, τ) sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *(E, τ) ist ein lokalkonvexer Raum.*

(b) *(E, τ) hat eine Nullumgebungsbasis aus konvexen Mengen.*

(c) *(E, τ) hat eine Nullumgebungsbasis aus absolutkonvexen Mengen.*

Beweis. Die Implikationen (a)$\Longrightarrow$(b) und (c)$\Longrightarrow$(b) sind unmittelbar klar und wegen Bemerkung11.5 folgt (a) aus (b).

Hat (E, τ) eine Nullumgebungsbasis aus konvexen Mengen und ist U eine beliebige τ–Nullumgebung in E, so gibt es eine konvexe Nullumgebung $V \subseteq U$. Diese enthält nach Bemerkung11.5 eine kreisförmige Nullumgebung W. Die konvexe Hülle U_0 von W ist dann eine absolutkonvexe Nullumgebung mit $U_0 \subseteq V \subseteq U$. Also gilt (c). □

11.8. Lemma. *Seien (E, τ) und (F, σ) zwei topologische Vektorräume.*

(a) *Eine lineare Abbildung $S : E \to F$ ist genau dann auf (E, τ) stetig, wenn sie in 0 stetig ist.*

(b) *Eine Halbnorm $p : E \to [0, \infty)$ ist genau dann auf (E, τ) stetig, wenn sie in* 0 *stetig ist.*

Beweis. Ist S bzw. p auf ganz E bezüglich τ stetig, so natürlich auch in 0.

Ist S stetig in 0 und $x_0 \in E$ beliebig, so folgt wegen der Stetigkeit der Translationen $T_{-x_0} : u \mapsto u - x_0$ in (E, τ) und T_{Sx_0} in (F, σ) wegen der Linearität von S für alle $x \in E$:

$$Sx = S(x - x_0) + Sx_0 = (T_{Sx_0} \circ S \circ T_{-x_0})(x)$$

auch die Stetigkeit von $S = T_{Sx_0} \circ S \circ T_{-x_0}$ in x_0.

Ist p in 0 stetig und $\varepsilon > 0$ beliebig, so gibt es eine Nullumgebung U in (E, τ) mit $p(u) < \varepsilon$ für alle $u \in U$. Ist $x_0 \in E$ beliebig, so gilt für alle x aus der τ–Umgebung $x_0 + U$ von x_0 mit Hilfe der Dreiecksungleichung

$$|p(x) - p(x_0)| \leq p(x - x_0) < \varepsilon$$

und damit die Stetigkeit von p in x_0. □

11.9. Lemma. *Sei (E, τ) ein lokalkonvexer Raum und sei U eine absolutkonvexe τ–Nullumgebung in E. Dann gilt:*

(a) *Das Minkowski–Funktional p_U von U ist eine stetige Halbnorm auf E.*
(b) $\operatorname{int} U = D_{p_U} := \{x \in E\, ; \, p_U(x) < 1\} \subseteq U \subseteq B_{p_U} := \{x \in E\, ; \, p_U(x) \leq 1\}$.
(c) $\frac{1}{2}\overline{U} \subseteq \operatorname{int} U$.

Beweis. Nach Lemma 11.4 ist p_U eine Halbnorm auf E und es gelten die Inklusionen in (b).

(a) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da die Multiplikation mit $\frac{\varepsilon}{2}$ nach Bemerkung 11.2 eine Homöomorphie von (E, τ) auf sich ist, ist $\frac{\varepsilon}{2}U$ eine τ–Nullumgebung. Für alle $x \in \frac{\varepsilon}{2}U$ folgt wegen $\frac{2}{\varepsilon}x \in U \subseteq B_{p_U}$:

$$p_U(x) = \frac{\varepsilon}{2} p_U\big(\frac{2}{\varepsilon}x\big) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Also ist p_U in 0 und damit auf (E, τ) stetig.

(b) Wegen der Stetigkeit von p_U ist D_{p_U} offen und B_{p_U} abgeschlossen. Somit folgt

$$D_{p_U} \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq B_{p_U}\,.$$

Ist $x \in \operatorname{int} U$, so gibt es wegen der Stetigkeit der Multiplikation mit Skalaren in $(1, x)$ ein $\varepsilon > 0$ mit $(1 + \varepsilon)x \in U$. Es folgt $p_U(x) \leq \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$ und daher $x \in D_{p_U U}$.

Ist $x \in B_{p_U}$ und V eine beliebige τ–Umgebung von x, so gibt es wegen der Stetigkeit der Multiplikation mit Skalaren in $(1, x)$ ein $\varepsilon \in (0, 1)$, so daß für alle $r \in (1 - \varepsilon, 1)$ gilt $rx \in V$. Wegen $p_U(x) \leq 1$ gibt es ein $s \in \big(1, \frac{1}{1-\varepsilon}\big)$ mit $x \in sU$. Es folgt $\frac{1}{s}x \in U \cap V$. Also gilt $x \in \overline{U}$.

(c) folgt in nahe liegender Weise aus (b) □

Als unmittelbare Folgerung erhalten wir:

11.10. Folgerung. *Jeder lokalkonvexe Raum besitzt eine Nullumgebungsbasis aus abgeschlossenen, absolutkonvexen Mengen und auch eine Nullumgebungsbasis aus offenen, absolutkonvexen Mengen.*

11.11. Definition. (a) Eine Familie $\mathfrak{V}$ von Nullumgebungen in einem topologischen Vektorraum (E, τ) heißt ein *Fundamentalsystem von Nullumgebungen* für τ, falls es zu jeder Nullumgebung U in (E, τ) ein $V \in \mathfrak{V}$ und ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $\varepsilon V \subseteq U$. Insbesondere ist dann $\{\varepsilon V\, ; \, V \in \mathfrak{V}, \varepsilon > 0\}$ eine Nullumgebungsbasis für τ.

(b) Eine Familie $\mathcal{P} = (p_\alpha)_{\alpha \in A}$ von stetigen Halbnormen auf einem lokalkonvexen Raum (E, τ) heißt ein *Fundamentalsystem von Halbnormen* für τ, falls die Mengen $(D_{p_\alpha})_{\alpha \in A}$ ein Fundamentalsystem von Nullumgebungen für τ bilden.

Jede Nullumgebungsbasis in einem topologischen Vektorraum ist auch ein Fundamentalsystem von Nullumgebungen.

In einem normierten Raum $(E, \|\cdot\|)$ ist $\{B_E\}$ ein Fundamentalsystem von Nullumgebungen (aber keine Nullumgebungsbasis) und $\{\|\cdot\|\}$ ein Fundamentalsystem für die Normtopologie auf E.

11.12. SATZ. *Sei (E, τ) ein lokalkonvexer Raum.*

(a) *(E, τ) besitzt ein Fundamentalsystem von stetigen Halbnormen. Jedes Fundamentalsystem $\mathcal{P} = (p_\alpha)_{\alpha \in A}$ von stetigen Halbnormen zu τ hat die folgende Eigenschaft:*

$$\forall \alpha, \beta \in A \quad \exists \gamma \in A,\, C > 0 \quad \forall x \in E: \qquad \max\{p_\alpha(x), p_\beta(x)\} \leq C p_\gamma(x). \tag{11.1}$$

(b) *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) *(E, τ) ist separiert.*

(ii) *(E, τ) hat eine Nullumgebungsbasis $\mathfrak{B}(0)$ mit*

$$\bigcap_{U \in \mathfrak{B}(0)} U = \{0\}. \tag{11.2}$$

(iii) *Für jede Nullumgebungsbasis $\mathfrak{B}(0)$ in (E, τ) gilt* (11.2).

(iv) *(E, τ) besitzt ein Fundamentalsystem $\mathcal{P} = (p_\alpha)_{\alpha \in A}$ von stetigen Halbnormen mit*

$$\forall x \in E \setminus \{0\} \quad \exists \alpha \in A: \qquad p_\alpha(x) > 0. \tag{11.3}$$

(v) *Für jedes Fundamentalsystem $\mathcal{P} = (p_\alpha)_{\alpha \in A}$ von stetigen Halbnormen in (E, τ) gilt* (11.3).

BEWEIS. (a) Nach Folgerung 11.10 hat (E, τ) eine Nullumgebungsbasis $\mathfrak{B}(0)$ von absolutkonvexen Nullumgebungen. Die Familie $(p_U)_{U \in \mathfrak{B}(0)}$ ist dann ein Fundamentalsystem von stetigen Halbnormen auf (E, τ).

Sei nun $\mathcal{P} = (p_\alpha)_{\alpha \in A}$ ein beliebiges Fundamentalsystem von stetigen Halbnormen für τ und seien $\alpha, \beta \in A$ beliebig. Dann gibt es ein $\gamma \in A$ und ein $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon D_{p_\gamma} \subseteq D_{p_\alpha} \cap D_{p_\beta}$. Hieraus folgt

$$\forall x \in E: \max\{p_\alpha(x), p_\beta(x)\} \leq \frac{1}{\varepsilon} p_\gamma(x).$$

(b) Ist (E, τ) separiert, so ist $\bigcap_{U \in \mathfrak{U}} U = \{0\}$. Ist nun $\mathfrak{B}(0)$ eine beliebige Nullumgebungsbasis für τ, so gibt es zu jeder Nullumgebung U ein $V_U \in \mathfrak{B}(0)$ mit $V_U \subseteq U$. Es folgt

$$\{0\} \subseteq \bigcap_{V \in \mathfrak{B}(0)} V \subseteq \bigcap_{U \in \mathfrak{U}(0)} V_U \subseteq \bigcap_{U \in \mathfrak{U}(0)} U = \{0\}.$$

Also ist (11.2) erfüllt und es gilt (iii).

Offensichtlich folgt (ii) aus (iii).

Sei nun (ii) erfüllt und seien $x, y \in E$ beliebig mit $x \neq y$. Nach Voraussetzung gibt es ein $U \in \mathfrak{B}(0)$ mit $x - y \notin U$. Nach Bemerkung 11.2 gibt es eine Nullumgebung V mit $V + V \subseteq U$. Mit V ist auch $-V$ eine Nullumgebung. Es folgt (wegen $x - y \notin U$): $x - V \cap y + V = \emptyset$. τ ist also separiert.

Ist $\mathcal{P} = (p_\alpha)_{\alpha \in A}$ ein Fundamentalsystem von stetigen Halbnormen für τ, so ist

$$\{\varepsilon D_{p_\alpha}\, ;\, \varepsilon > 0, \alpha \in A\}$$

eine Nullumgebungsbasis für τ. Die Äquivalenz von (iv) und (v) zu (i) folgt nun leicht mit Hilfe der Äquivalenz der ersten drei Aussagen. $\square$

BEMERKUNG. Der Beweis zeigt, daß die Äquivalenz der ersten drei Aussagen in (b) in allgemeinen topologischen Vektorräumen gilt.

11.13. Definition. Ein Halbnormensystem $\mathcal{P} = (p_\alpha)_{\alpha\in A}$ auf einem $\mathbb{K}$–Vektorraum E heißt *separierend*, falls zu jedem $x \neq 0$ aus E ein $\alpha \in A$ gibt mit $p_\alpha(x) > 0$. Dies ist offensichtlich äquivalent zu

$$\bigcap_{\alpha\in A} N_{p_\alpha} = \{0\} \qquad (\text{mit} \quad N_{p_\alpha} := \{u \in E\,;\, p_\alpha(x) = 0\}).$$

11.14. Lemma. *Sei $\mathcal{P} = (p_\alpha)_{\alpha\in A}$ ein System von Halbnormen auf einem $\mathbb{K}$–Vektorraum E. Dann sind*

$$\mathfrak{V}_D := \Big\{\rho \bigcap_{j=1}^{k} D_{p_{\alpha_j}}\,;\, \rho > 0, k \in \mathbb{N}, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in A\Big\}$$

und

$$\mathfrak{V}_B := \Big\{\rho \bigcap_{j=1}^{k} B_{p_{\alpha_j}}\,;\, \rho > 0, k \in \mathbb{N}, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in A\Big\}$$

Nullumgebungsbasen einer lokalkonvexen Topologie $\tau_{\mathcal{P}}$ auf E, für die alle p_α, $\alpha \in A$, stetig sind. $\tau_{\mathcal{P}}$ ist die gröbste Topologie auf E mit dieser Eigenschaft.

Ist $\mathcal{P}$ ein separierendes Halbnormensystem, so ist $\tau_{\mathcal{P}}$ eine separierte Topologie.

Beweis. Sei $\tau_{\mathcal{P}}$ die Menge aller Teilmengen G von E, für die gilt:

$$\forall x \in G \quad \exists V \in \mathfrak{V}_D \quad (\text{ bzw. } \exists V \in \mathfrak{V}_B): \qquad x + V \subseteq G.$$

Man rechnet nach, daß $\tau_{\mathcal{P}}$ eine Topologie auf E definiert, für die sowohl

$$\{x + V\,;\, x \in E, V \in \mathfrak{V}_D\} \quad \text{als auch} \quad \{x + V\,;\, x \in E, V \in \mathfrak{V}_B\}$$

eine Umgebungsbasis aus konvexen Mengen ist. Wir zeigen, daß $\tau_{\mathcal{P}}$ eine Vektorraumtopologie ist.

Zu (U1): Seien $x, y \in E$ beliebig und sei U eine beliebige $\tau_{\mathcal{P}}$–Umgebung von $x + y$. Dann gibt es ein $\rho > 0$ und endlich viele $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in A$ mit

$$x + y + \rho \bigcap_{j=1}^{k} D_{p_{\alpha_j}} \subseteq V.$$

Wegen

$$\Big(x + \frac{\rho}{2} \bigcap_{j=1}^{k} D_{p_{\alpha_j}}\Big) + \Big(y + \frac{\rho}{2} \bigcap_{j=1}^{k} D_{p_{\alpha_j}}\Big) \subseteq x + y + \rho \bigcap_{j=1}^{k} D_{p_{\alpha_j}} \subseteq V$$

ist also (U1) erfüllt.

Zu (U2): Seien $\lambda \in \mathbb{K}$ und $x \in E$ beliebig und sei U eine beliebige $\tau_{\mathcal{P}}$–Umgebung von λx. Dann gibt es ein $\rho > 0$ und endlich viele $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in A$ mit

$$\lambda x + \rho \bigcap_{j=1}^{k} D_{p_{\alpha_j}} \subseteq V.$$

Dann gilt für alle $\mu \in \mathbb{K}$ mit

$$|\lambda - \mu| < \varepsilon := \frac{\rho}{2 \max_{1\le j\le k} p_{\alpha_j}(x) + \rho}$$

und alle

$$y \in x + \frac{\rho}{2(|\lambda| + 1)} \bigcap_{j=1}^{k} D_{p_{\alpha_j}}$$

es ist $\mu y = \lambda x + (\mu - \lambda)y + \lambda(y - x)$ enthalten in

$$\lambda x + \varepsilon\big(\max_{1\leq j\leq k} p_{\alpha_j}(x) + \rho/2\big)\bigcap_{j=1}^{k} D_{p_{\alpha_j}} + \frac{|\lambda|\rho}{2(|\lambda|+1)}\bigcap_{j=1}^{k} D_{p_{\alpha_j}} \subseteq \lambda x + \rho\bigcap_{j=1}^{k} D_{p_{\alpha_j}} \subseteq V.$$

Also ist auch (U2) erfüllt und $\tau_{\mathcal{P}}$ ist eine lokalkonvexe Vektorraumtopologie. Der Zusatz ist klar nach Satz 11.12. □

11.15. Definition. Eine teilweise geordnete Menge $(A, \leq)$ heißt (nach rechts) *gerichtet* oder (rechts) *filtrierend*, falls jede endliche Teilmenge von A eine obere Schranke in A besitzt, d.h. wenn zu je endlich vielen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A$ ein $\beta \in A$ existiert mit $\alpha_j \leq \beta$ für alle $j = 1, \ldots, n$.

Eine Teilmenge B einer gerichteten Menge $(A, \leq)$ heißt

- *residual*, falls ein $\alpha_0 \in A$ existiert mit $\{\alpha \in A\,;\, \alpha_0 \leq \alpha\} \subseteq B$.
- *konfinal*, falls es zu jedem $\alpha \in A$ ein $\beta \in B$ gibt mit $\alpha \leq \beta$.

Eine Familie $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$, A eine gerichtete Indexmenge, in einem topologischen Raum (X, τ) heißt ein *Netz* oder eine *verallgemeinerte Folge* oder *Moore–Smith–Folge*.

Ein Netz $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ in einem topologischen Raum (X, τ) *konvergiert gegen ein Element* $y \in X$, falls für jede Umgebung U von y die Menge $A_U := \{\alpha \in A\,;\, x_\alpha \in U\}$ residual in A ist, d.h. falls es zu jeder Umgebung U von y ein $\alpha_0 \in A$ gibt mit $x_\alpha \in U$ für alle $\alpha \geq \alpha_0$ aus A. Ist die Topologie τ separiert (d.h. je zwei verschiedene Punkte besitzen disjunkte Umgebungen), so ist der Grenzwert y hierdurch eindeutig bestimmt und wir schreiben $y = \lim_{\alpha\in A} x_\alpha$ oder $x_\alpha \to y$.

Ein Netz $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ in einem topologischen Vektorraum (E, τ) heißt ein *Cauchy-Netz*, falls es zu jeder Nullumgebung U in (E, τ) ein $\alpha_0 \in A$ gibt mit $x_\alpha - x_\beta \in U$ für alle $\alpha, \beta \geq \alpha_0$.

Ein topologischer Vektorraum (E, τ) heißt

- *vollständig*, falls in (E, τ) jedes Cauchy–Netz konvergent ist.
- *folgenvollständig*, falls in (E, τ) jede Cauchyfolge konvergent ist.
- *metrisierbar*, falls es eine Metrik d auf E gibt, so daß die durch d gegebene Topologie τ_d mit τ übereinstimmt.

Übungsaufgaben zu Kapitel 11.

11.1. Aufgabe. Zeigen Sie, daß ein metrisierbarer topologischer Vektorraum genau dann vollständig ist, wenn er folgenvollständig ist.

11.2. Aufgabe. Zeigen Sie, daß für einen lokalkonvexen Hausdorffraum (E, τ) die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) (E, τ) ist metrisierbar.
(b) (E, τ) besitzt eine abzählbare Nullumgebungsbasis.
(c) (E, τ) besitzt eine abzählbare Nullumgebungsbasis aus absolutkonvexen Mengen.
(d) (E, τ) besitzt eine abzählbare Nullumgebungsbasis $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus absolutkonvexen Mengen mit $U_{n+1} \subseteq U_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
(e) τ wird durch ein abzählbares separierendes Halbnormensystem $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben mit

$$\forall x \in E \quad \forall n \in \mathbb{N}: \qquad q_n(x) \leq q_{n+1}(x).$$

(f) τ wird durch ein abzählbares separierendes Halbnormensystem gegeben.

KAPITEL 12

Schwache Topologien

12.1. Definition. Seien E, F zwei $\mathbb{K}$–Vektorräume ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$).

(a) Eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times F \to \mathbb{K}$ heißt *Bilinearform*, falls für alle $x \in E$ und alle $y \in F$ die Abbildungen

$$\begin{array}{llll} f_x : F \to \mathbb{K} & \text{mit} \quad f_x(v) := \langle x, v \rangle \text{ für} & v \in F & \text{und} \\ g_y : E \to \mathbb{K} & \text{mit} \quad g_y(u) := \langle u, y \rangle \text{ für} & u \in E & \end{array}$$

linear sind.

(b) Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine Bilinearform auf $E \times F$. Das Tripel $(E, F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ heißt *Dualsystem* und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine *Dualität zwischen E und F*, falls gilt:
(S1) $\forall\, 0 \neq x \in E \;\exists\, y \in F : \langle x, y \rangle \neq 0$.
(S2) $\forall\, 0 \neq y \in F \;\exists\, x \in E : \langle x, y \rangle \neq 0$.
Statt $(E, F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ schreiben wir auch kürzer $\langle E, F \rangle$.

12.2. Beispiele. (a) Sei E ein $\mathbb{K}$–Vektorraum und sei $E^{\#}$ der Raum aller $\mathbb{K}$-linearen Abbildungen von E nach $\mathbb{K}$. Dann ist $\langle E, E^{\#} \rangle$ mit $\langle x, f \rangle := f(x)$ für $x \in E,\ f \in E^{\#}$ ein Dualsystem.

(b) Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und E' der Raum aller bzgl. der gegebenen Norm $\|\cdot\|$ auf E stetigen $\mathbb{K}$–linearen Abbildungen von E nach $\mathbb{K}$. (E' ist ein Untervektorraum von $E^{\#}$). Dann ist $\langle E, E' \rangle$ mit $\langle x, f \rangle := f(x)$ für $x \in E$ und $f \in E'$ ein Dualsystem.

(c) Sei $E := C([0,1], \mathbb{K})$. Dann ist $\langle E, E \rangle$ mit $\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(t)g(t)dt$ für $f, g \in C([0,1], \mathbb{K})$ ein Dualsystem.

Der Beweis von (a) ist klar, ebenso die Bilinearität in (b) und (c). In der Situation (b) ist (S2) trivialerweise erfüllt. Die Gültigkeit von (S1) folgt aus dem Satz von Hahn–Banach. Der Nachweis, daß in (c) die Bedingungen (S1) und (S2) erfüllt sind, wird in den Übungen bewiesen.

12.3. Bemerkung. Ist $\langle E, F \rangle$ ein Dualsystem, so auch $[F, E]$ mit $[f, e] := \langle e, f \rangle$ für alle $e \in E, f \in F$.

12.4. Definition. Sei $\langle E, F \rangle$ ein Dualsystem. Die *schwache Topologie* $\sigma(E, F)$ (bzw. $\sigma(F, E)$) ist die gröbste Topologie auf E (bzw. auf F), für die alle Linearformen $g_y = \langle \cdot, y \rangle,\ y \in F$, (bzw. $f_x = \langle x, \cdot \rangle, x \in E$) stetig sind. D.h. also: $\sigma(E, F)$ ist die Initialtopologie auf E bzgl. $(\mathbb{K}, \tau_{|\cdot|}, g_y)\,(y \in F)$ und $\sigma(F, E)$ ist die Initialtopologie auf F bzgl. $(\mathbb{K}, \tau_{|\cdot|}, f_x)\,(x \in E)$, wobei $\tau_{|\cdot|}$ die durch den Absolutbetrag auf $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ gegebene Topologie sei.

12.5. Bemerkungen. Sei $\langle E, F \rangle$ ein Dualsystem.

(a) Man überlegt sich leicht (etwa mit Satz 3.7 aus [**2**], daß eine Menge $\Omega \subseteq E$ genau dann bezüglich $\sigma(E, F)$ offen ist, wenn es zu jedem $x \in \Omega$ endlich viele $f_1, \ldots, f_n \in F$ und ein $\varepsilon > 0$ gibt mit

$$U(x; f_1, \ldots, f_n, \varepsilon) := \{y \in E\,;\, |\langle x, f_j \rangle - \langle y, f_j \rangle| < \varepsilon\} = \{y \in E\,;\, |\langle x - y, f_j \rangle| < \varepsilon\} \subseteq \Omega\,.$$

Eine Menge $U \subseteq E$ ist genau dann eine $\sigma(E,F)$–Umgebung eines Punktes $x_0 \in E$, wenn es endlich viele $f_1, \ldots, f_n \in F$ und ein $\varepsilon > 0$ gibt mit

$$U(x; f_1, \ldots, f_n, \varepsilon) \subseteq U.$$

(b) Die Topologien $\sigma(E,F)$ und $\sigma(F,E)$ sind separiert.

(c) Ist F_0 ein Untervektorraum von F, so daß auch $(E, F_0, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ noch ein Dualsystem ist, so ist $\sigma(E, F_0) \subseteq \sigma(E,F)$.

Beweis. Zu (b): Sind $x_1, x_2 \in E$ mit $x_1 \neq x_2$, so gibt es nach (S1) ein $f \in F$ mit $d := |\langle x_1 - x_2, f\rangle| > 0$. Dann sind $U(x_1; f, d/3)$ und $U(x_2; f, d/3)$ zueinander disjunkte $\sigma(E,F)$–Umgebungen von x_1 bzw. x_2.

(c) folgt unmittelbar aus der Definition der Initialtopologie. □

12.6. Definition. Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und sei $\langle E, E'\rangle$ das Dualsystem aus Beispiel 12.2. Dann nennt man $\sigma(E,E')$ die *schwache Topologie* auf E und $\sigma(E', E)$ die *schwach***–Topologie* auf E'.

12.7. Bemerkungen. Auf E' hat man also neben der Normtopologie noch die schwache Topologie $\sigma(E', E'')$ und die schwach*–Topologie $\sigma(E', E)$ zur Verfügung.

(a) Für alle $x \in E$ ist durch

$$J_E(x) : E' \to \mathbb{K}, \quad x' \mapsto x'(x) = [x, x']$$

ein lineares Funktional definiert. Nach einer Folgerung aus dem Satz von Hahn–Banach ist hierdurch eine isometrische lineare Einbettung $J_E : E \to E''$ gegeben. Wegen $\langle x', J_E(x)\rangle = J_E(x)(x') = x'(x) = [x, x']$ für alle $x \in E, x' \in E'$ stimmen also die Topologien $\sigma(E', J_E(E))$ und die schwach*–Topologie $\sigma(E', E)$ überein. Mit Bemerkung 12.5 (c) und aus der Definition der schwachen Topologie folgt also $\sigma(E', E) \subseteq \sigma(E', E'') \subseteq \tau_{\|\cdot\|}$, wobei $\tau_{\|\cdot\|}$ die Normtopologie auf E' bezeichnet.

(b) Ist E reflexiv, d.h. gilt $J_E(E) = E''$, so ist $J_E : E \to E''$ nicht nur eine bijektive Isometrie sondern auch eine Homöomorphie von $(E, \sigma(E', E))$ auf $(E'', \sigma(E', E''))$.

12.8. Satz. *Sei $(E, \|\cdot\|_E)$ ein unendlich dimensionaler normierter Raum. Dann gilt:*

(a) *Die schwache Topologie $\sigma(E, E')$ ist echt gröber auf E als die durch die Norm $\|\cdot\|_E$ gegebene Topologie $\tau(E)$.*

(b) *$\dim E' = \infty$ und die schwach*–Topologie $\sigma(E', E)$ auf E' ist echt gröber als die durch die Norm $\|\cdot\|_{E'}$ auf E' gegebene Topologie $\tau(E')$.*

Beweis. (a) Nach Definition der schwachen Topologie ist $\sigma(E, E')$ ist gröber als $\tau(E)$, d.h. es ist $\sigma(E, E') \subseteq \tau(E)$.

Annahme: $\tau(E) \subseteq \sigma(E, E')$. Da die offene Einheitskugel $U := \{x \in E\,;\, \|x\|_E < 1\}$ eine $\tau(E)$–Nullumgebung, also nach Annahme auch eine $\sigma(E, E')$–Nullumgebung ist, gibt es nach Bemerkung 12.5 endlich viele $x'_1, \ldots, x'_n \in E'$ und ein $\varepsilon > 0$ mit

$$U(0; x'_1, \ldots, x'_n, \varepsilon) := \{x \in E\,;\, |x'_j(x)| < \varepsilon \text{ für } j = 1, \ldots, n\} \subseteq U.$$

Insbesondere folgt

$$Y := \bigcap_{j=1}^{n} \ker x'_j \subseteq U(0; x'_1, \ldots, x'_n, \varepsilon) \subseteq U.$$

Y ist ein Untervektorraum der Kodimension $\leq n$ und daher wegen $\dim E = \infty$ unendlich dimensional. Sei nun $y \in Y$ beliebig. Dann folgt $ry \in Y \subseteq U$ und damit $\|ry\|_E < 1$ für alle $r > 0$. Dies ist nur möglich, wenn $y = 0$ ist. Es folgt $Y = \{0\}$ im Widerspruch zu $\dim Y = \infty$. Also muß $\sigma(E, E') \subsetneq \tau(E)$ gelten.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Da E unendlich dimensional ist, gibt es linear unabhängige Vektoren $e_1, \ldots, e_n \in E$. Für $j = 1, \ldots, n$ sei $F_j := \mathrm{LH}\{e_k\,;\, j \neq k \in \{1, \ldots, n\}\}$. Als endlich dimensionaler Untervektorraum ist F_j abgeschlossen und es gilt $e_j \notin F_j$. Nach der Folgerung 6.7 aus dem Satz von Hahn–Banach gibt es also $e'_j \in E'$ mit $e'_j(e_j) = 1$ und $e'_j(e_k) = 0$ für $j \neq k \in \{1, \ldots, n\}$, $j = 1, \ldots, n$. Die so erhaltenen $e'_1, \ldots, e'_n$ sind linear unabhängig, denn aus $\sum_{j=1}^n \alpha_j e'_j = 0$ mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ folgt $0 = \Big(\sum_{j=1}^n \alpha_j e'_j\Big)(e_k) = \alpha_k$ für $k = 1, \ldots, n$. Also ist $\dim E' \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Bemerkung 12.7 (a) ist $\sigma(E', E) \subseteq \tau(E')$. Wie im Beweis zu (a) zeigt man nun, daß diese Inklusion echt ist. □

12.9. Definition. Sei $\langle E, F\rangle$ ein Dualsystem. Ein Netz $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ heißt ein *Cauchy–Netz*, falls es zu jeder $\sigma(E,F)$–Nullumgebung U in E ein $\alpha_0 \in A$ gibt, so daß für alle $\alpha, \beta \geq \alpha_0$ gilt: $x_\alpha - x_\beta \in U$. Da jede $\sigma(E,F)$–Nullumgebung U in E eine Nullumgebung der Form

$$U(0; f_1, \ldots, f_n, \varepsilon) = \{x \in E\,;\, |\langle x, f_j\rangle| < \varepsilon \text{ für } j = 1, \ldots, n\}$$

mit endlich vielen $f_1, \ldots, f_n \in F$ und einem $\varepsilon > 0$ enthält, ist dies äquivalent zu

$$\forall f \in F, \varepsilon > 0\, \exists \alpha_0 \in A\, \forall \alpha, \beta \geq \alpha_0 : \quad |\langle x_\alpha - x_\beta, f\rangle| < \varepsilon\,.$$

Ein Netz $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ in E heißt $\sigma(E,F)$*–konvergent* gegen ein $x_0 \in E$, falls für jede $\sigma(E,F)$–Nullumgebung U in E ein $\alpha_0 \in A$ existiert, so daß $x_\alpha - x_0 \in U$ für alle $\alpha \geq \alpha_0$ aus A gilt. Wie oben sieht man, daß dies äquivalent ist zu

$$\forall f \in F, \varepsilon > 0\, \exists \alpha_0 \in A\, \forall \alpha \geq \alpha_0 : \quad |\langle x_\alpha - x_0, f\rangle| < \varepsilon\,.$$

Wir schreiben dann $x_\alpha \to x_0$ bezüglich $\sigma(E,F)$ oder $x_0 = \sigma(E,F)\text{-}\lim_\alpha x_a$. Der $\sigma(E,F)$–Grenzwert ist hierdurch eindeutig bestimmt. Gilt nämlich $x_\alpha \to x_0$ und $x_\alpha \to x_1$ bezüglich $\sigma(E,F)$ und ist $f \in F$ beliebig, so gibt es zu beliebigem $\varepsilon > 0$ zwei Elemente $\alpha_0, \alpha_1 \in A$, so daß für alle $\alpha \geq \alpha_j$ gilt $|\langle x_\alpha - x_j, f\rangle| < \varepsilon/2$, $j = 0, 1$. Da die Indexmenge A des Netzes $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ gerichtet ist, gibt es zu α_0 und α_1 ein $\alpha_2 \in A$ mit $\alpha_0 \leq \alpha_2$ und $\alpha_1 \leq \alpha_2$. Es folgt

$$|\langle x_1 - x_0, f\rangle| \leq |\langle x_1 - x_{\alpha_2}, f\rangle - \langle x_0 - x_{\alpha_2}, f\rangle| \leq |\langle x_1 - x_{\alpha_2}, f\rangle| + |\langle x_0 - x_{\alpha_2}, f\rangle| < \varepsilon\,.$$

Da $\varepsilon > 0$ hierbei beliebig ist, muß $\langle x_1 - x_0, f\rangle = 0$ für alle $f \in F$ gelten. Wegen (S1) folgt hieraus $x_0 = x_1$.

12.10. Satz von Banach–Alaoglu. *Sei $(E, \|\cdot\|_E)$ ein normierter Raum. Dann ist die Einheitskugel $B_{E'}$ des topologischen Dualraums E' schwach*–kompakt.*

Beweis. Wir versehen $\mathbb{K}^E$ mit der Produkttopologie τ (vergl. Grundlagen aus der mengentheoretischen Topologie). Dies ist die gröbste Topologie auf $\mathbb{K}^E$, so daß für alle $x \in E$ die Projektionen auf die x–Komponenten

$$\pi_x : \mathbb{K}^E \to \mathbb{K}\,, \quad \lambda = (\lambda_u)_{u\in E} \mapsto \pi_x(\lambda) := \lambda_x$$

stetig sind. Man überlegt sich, daß eine Menge $V \subseteq \mathbb{K}^E$ genau dann eine τ–Umgebung eines Punktes $\lambda = (\lambda_x)_{x\in E} \in \mathbb{K}^E$ ist, wenn es endlich viele $x_1, \ldots, x_n \in E$ und ein $\varepsilon > 0$ gibt mit

$$V(\lambda; x_1, \ldots, x_n, \varepsilon) := \{\mu = (\mu_x)_{x\in E} \in \mathbb{K}^E\,;\, |\lambda_{x_j} - \mu_{x_j}| < \varepsilon \text{ für } j = 1, \ldots, n\} \subseteq V\,.$$

Wir definieren $\phi : E' \to \mathbb{K}^E$ durch $\phi(x') := (x'(x))_{x\in E}$ für alle $x' \in E'$. Für alle $x' \in E$, je endlich viele $x_1, \ldots, x_n$ und alle $\varepsilon > 0$ gilt

$$\begin{aligned} \phi(U(x'; x_1, \ldots, x_n, \varepsilon)) =& \phi(\{y' \in E'\,;\, |x'(x_j) - y'(x_j)| < \varepsilon \text{ für } j = 1, \ldots, n\}) \\ =& \phi(E') \cap V(\phi(x'); x_1, \ldots, x_n, \varepsilon)\,. \end{aligned}$$

Hieraus folgt, daß ϕ eine Homöomorphie von $(E', \sigma(E', E))$ auf $\phi(E')$ versehen mit der von τ induzierten Relativtopologie τ_0 ist.

Da alle Projektionen π_u, $u \in E$, stetig sind, ist

$$\begin{aligned} F := &\{\lambda \in \mathbb{K}^E\,;\, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}\, \forall x, y \in E: \quad \alpha\pi_x(\lambda) + \beta\pi_y(\lambda) - \pi_{\alpha x+\beta y}(\lambda) = 0\} \\ = &\{(f(x))_{x\in E}\,;\, f \in E^{\#}\} \end{aligned}$$

als Durchschnitt der Urbilder der abgeschlossenen Menge $\{0\}$ unter den stetigen Abbildungen $\alpha\pi_x + \beta\pi_y - \pi_{\alpha x+\beta y}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}\,, x, y \in E$, τ–abgeschlossen. Offensichtlich gilt $\phi(E') \subseteq F$.

Für alle $x \in E$ ist $K_x := \{\alpha \in \mathbb{K}\,;\, |\alpha| \leq \|x\|_E\}$ kompakt in $\mathbb{K}$. Nach dem Satz von Tychonoff (siehe z.B. Satz 4.13 in [**2**] ist also $K := \prod_{x\in E} K_x$ versehen mit der Produkttopologie kompakt. Die Produkttopologie auf K stimmt mit der von τ auf K induzierten Relativtopologie überein. Daher ist K auch τ–kompakt. Da F bzgl. τ abgeschlossen ist, folgt auch die τ–Kompaktheit von $K_0 := K \cap F$. Offensichtlich ist

$$K_0 = \{(f(x))_{x\in E}\,;\, f \in E^{\#},\, |f(x)| \leq \|x\|_E \text{ für alle } x \in E\} = \phi(B_{E'})\,.$$

Da $\phi : (E', \sigma(E')) \to (\phi(E'), \tau_0)$ eine Homöomorphie ist, ist $B_{E'} = \phi^{-1}(K_0)$ $\sigma(E', E)$–kompakt. □

12.11. Satz. *Sei $(E, \|\cdot\|_E)$ ein separabler normierter Raum. Dann gibt es eine Metrik d auf der Einheitskugel $B_{E'}$ des topologischen Dualraums E', so daß die durch d gegebene Topologie auf $B_{E'}$ mit der durch die schwach*–Topologie induzierten Relativtopologie übereinstimmt. $(B_{E'}, d)$ ist also ein kompakter metrischer Raum. Insbesondere ist $B_{E'}$ schwach*–folgenkompakt, d.h. jede Folge aus $B_{E'}$ besitzt eine schwach*–konvergente Teilfolge.*

Beweis. Da $(E, \|\cdot\|_E)$ ein separabler normierter Raum ist, gibt es eine abzählbare normdichte Teilmenge $\{x_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$ in E. Wir definieren eine Abbildung $d' : E' \times E' \to [0, \infty)$ durch

$$d'(x', y') := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|x'(x_n) - y'(x_n)|}{1 + |x'(x_n) - y'(x_n)|} \quad \text{für alle } x', y' \in E'.$$

Offensichtlich gilt $d'(x', y') = d'(y', x')$ für alle $x', y' \in E'$. Die Dreiecksungleichung rechnet man in der üblichen Weise nach. Sind $x', y' \in E'$ mit $d'(x', y') = 0$, so folgt für alle $n \in \mathbb{N}$: $|x'(x_n) - y'(x_n)| = 0$. Da $\{x_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$ dicht in E ist und das lineare Funktional $x' - y'$ stetig ist, folgt $x' - y' = 0$, d.h. $x' = y'$. Damit ist gezeigt, daß $d' : E' \times E' \to [0, \infty)$ eine Metrik auf E' ist. Wir zeigen die Stetigkeit der Identität auf E' als Abbildung von $(E', \sigma(E', E))$ nach (E', d'). Sei dazu $x' \in E'$ beliebig und $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{n=m+1}^{\infty} 2^{-n} < \varepsilon/2$. Für alle $y' \in U(x'; x_1, \ldots, x_m, \varepsilon/2)$ folgt

$$\begin{aligned} d'(x', y') = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|x'(x_n) - y'(x_n)|}{1 + |x'(x_n) - y'(x_n)|} &\leq \sum_{n=1}^{m} 2^{-n} \frac{|x'(x_n) - y'(x_n)|}{1 + |x'(x_n) - y'(x_n)|} + \sum_{n=m+1}^{\infty} 2^{-n} < \\ &< \sum_{n=1}^{m} 2^{-n} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Also ist $U(x'; x_1, \ldots, x_m, \varepsilon/2) \subseteq U_\varepsilon^{d'}(x')$ und die Stetigkeit von id:$(E', \sigma(E', E)) \to (E', d')$ ist gezeigt. Die auf $B_{E'}$ von der schwach*–Topologie induzierte Topologie ist also feiner als die durch die Metrik $d := d'|_{B_{E'}\times B_{E'}}$ definierte Topologie. Da $B_{E'}$ nach dem Satz von Banach–Alaoglu schwach*–kompakt ist, müssen (nach Folgerung 4.10 aus [**2**]) die beiden Topologien übereinstimmen und es folgt die Behauptung. □

Übungsaufgaben zu Kapitel 12.

12.1. Aufgabe. Sei $K \subset \mathbb{R}^N$ kompakt mit $\emptyset \neq K = \overline{\operatorname{int}(K)}$ und sei $E := C(K, \mathbb{K})$. Zeigen Sie: Durch

$$\langle f, g\rangle := \int_K f(x)g(x)d\lambda_N(x) \qquad (f, g \in E)$$

wird $\langle E, E\rangle$ zu einem Dualsystem. Hierbei sei λ_N das Lebesguemaß im $\mathbb{R}^N$. Kann man hierbei die Voraussetzung $\emptyset \neq K = \overline{\operatorname{int}(K)}$ ersetzen durch die Forderung $\lambda_N(K) \neq 0$?

12.2. Aufgabe. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ Lebesgue–meßbar mit $\lambda_N(\Omega) \neq 0$. $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ sei die Menge aller auf Ω Lebesgue–meßbaren $\mathbb{K}$–wertigen Funktionen f, für die eine Lebesge–Nullmenge $E \subset \Omega$ existiert mit $\sup_{x\in\Omega\setminus E} |f(x)| < \infty$. Für $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ definieren wir das *wesentliche Supremum von f auf Ω* durch

$$\|f\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)| := \inf\big\{\alpha > 0\,;\, \lambda_N(\{x \in \Omega\,;\, |f(x)| > \alpha\}) = 0\big\}$$

Sei weiter $\mathcal{N}(\Omega)$ die Menge aller Lebesgue–Nullfunktionen, d.h. die Menge aller Lebesgue–meßbaren Funktionen f, für die $f \equiv 0$ auf $\Omega \setminus E$ für eine Lebesge–Nullmenge $E \subset \Omega$ gilt. Zeigen Sie:

(a) $\|\cdot\|$ ist eine submultiplikative Halbnorm auf $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ mit

$$\mathcal{N}(\Omega) = \{f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)\,;\, \|f\|_\infty = 0\}.$$

(b) $L^\infty(\Omega) := \mathcal{L}^\infty(\Omega)/\mathcal{N}(\Omega)$ wird zu einer Banachalgebra mit der durch

$$\|f + \mathcal{N}(\Omega)\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)| \qquad (f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega))$$

definierten Norm.

(c) $\langle L^1(\Omega), L^\infty(\Omega)\rangle$ wird zu einem Dualsystem durch

$$\langle f + \mathcal{N}(\Omega), g + \mathcal{N}(\Omega)\rangle := \int_\Omega f(x)g(x)d\lambda_n(x) \qquad \big(f \in \mathcal{L}^1(\Omega),\ g \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)\big).$$

12.3. Aufgabe. Sei $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ offen, sei $\mathcal{N} := \mathcal{N}(G)$ und sei

$$H^\infty(G) := \mathcal{O}(G) \cap L^\infty(G)$$

die Menge der beschränkten holomorphen Funktionen auf G. Zeigen Sie

(a) Durch $h \mapsto h + \mathcal{N}$ ist eine Einbettung von $H^\infty(G)$ in $L^\infty(G)$ gegeben mit

$$\|h + \mathcal{N}\|_\infty = \sup_{z\in G} |h(z)|.$$

Wir identifizieren $H^\infty(G)$ mit dem Bild dieser Einbettung.

(b) Mit der Identifikation aus (a) ist $H^\infty(G)$ eine abgeschlossene Unteralgebra von $L^\infty(G)$.

(c) Für alle $z \in G$ ist

$$\delta_z : H^\infty(G) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \delta_z(h) := h(z)$$

ein $\sigma(L^\infty(G), L^1(G))$-stetiges Funktional auf $H^\infty(G)$.

(d) $H^\infty(G)$ ist $\sigma(L^\infty(G), L^1(G))$-abgeschlossen in $L^\infty(G)$.

KAPITEL 13

Gelfandtheorie in kommutativen Banachalgebren

In diesem Abschnitt sei $(\mathfrak{R}, \|\cdot\|)$ stets eine Banachalgebra über $\mathbb{C}$. Besitzt sie ein Einselement 1, so sei $\|1\| = 1$, was wie wir wissen, immer durch den Übergang zu einer äquivalenten Algebranorm erreicht werden kann.

13.1. Definition. Ein *multiplikatives lineares Funktional* φ auf $\mathfrak{R}$ ist ein nicht trivialer Algebrenhomomorphismus $\varphi : \mathfrak{R} \to \mathbb{C}$, d.h. eine nicht identisch verschwindendes lineares Funktional φ mit $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ für alle $a, b \in \mathfrak{R}$. Wir schreiben $\Delta(\mathfrak{R})$ für die Menge aller multiplikativen linearen Funktionale auf $\mathfrak{R}$ und setzen $\Delta_\infty(\mathfrak{R}) := \Delta(\mathfrak{R}) \cup \{\varphi_\infty\}$ mit $\varphi_\infty \equiv 0$ auf $\mathfrak{R}$.

13.2. Beispiele. (a) Sei K ein kompakter topologischer Hausdorffraum. Dann ist für alle $t \in K$ das *Dirac–Funktional* $\delta_t : C(K) \to \mathbb{C}$ mit $\delta_t(f) := f(t)$ ein stetiges multiplikatives lineares Funktional auf $C(K)$. Es gilt also $\{\delta_t\,;\, t \in K\} \subseteq \Delta(C(K))$.

(b) Sei W die Menge aller derjenigen Funktionen f auf $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| = 1\}$, die eine Fourierreihendarstellung haben

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \quad \text{mit} \quad \|f\|_W := \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| < \infty\,.$$

Offensichtlich ist $(W, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, der isometrisch isomorph ist zu $\ell^1(\mathbb{Z})$. Da die Fourierreihen aller Funktionen aus W gleichmäßig konvergieren, ist $W \subset C(\mathbb{T})$. Sind $f, g \in W$ gegeben mit

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n\,,\ g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^n$$

mit $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$, so ist

$$(fg)(z) := f(z)g(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k \quad \text{mit } c_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n b_{k-n} \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}\,.$$

Wegen

$$\begin{aligned}\|fg\|_W = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Big| \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n b_{k-n} \Big| \le \\ &\le \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| \cdot |b_{k-n}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| \sum_{k=-\infty}^{\infty} |b_{k-n}| = \|f\|_W \|g\|_W < \infty\end{aligned}$$

ist $(W, \|\cdot\|)$ eine Banachalgebra mit dem Einselement $1 \equiv z^0$. Da W eine Unteralgebra von $C(\mathbb{T})$ ist, sind die Punktevaluationen $\delta_z, z \in \mathbb{T}$, wieder multiplikative lineare Funktionale auf W. Man nennt W die *Wiener–Algebra*.

Multiplikative lineare Funktionale sind automatisch stetig. Es gilt:

13.3. Satz. $\Delta(\mathfrak{R}) \subset \mathfrak{R}'$ *und* $\|\varphi\| \le 1$ *für alle* $\varphi \in \Delta(\mathfrak{R})$. *Besitzt* $\mathfrak{R}$ *ein Einselement* 1, *so gilt für alle* $\varphi \in \Delta(\mathfrak{R})$, *es ist* $\|\varphi\| = 1 = \varphi(1)$.

Beweis. Sei $\varphi \in \Delta(\mathfrak{R})$ beliebig. Annahme: φ ist unstetig oder es ist $\|\varphi\| > 1$. Dann gibt es ein $x \in \mathfrak{R}$ mit $\|x\| < 1$ und $\varphi(x) = 1$. Der Grenzwert $y := \sum_{n=1}^{\infty} x^n$ existiert dann in $\mathfrak{R}$, da die Reihe wegen $\|x\| < 1$ absolut konvergiert, und es gilt $x + xy = y$. Wenden wir hierauf φ an, so folgt: $\varphi(x) + \varphi(x)\varphi(y) = \varphi(y)$, was wegen $\varphi(x) = 1$ zu dem Widerspruch $1 + \varphi(y) = \varphi(y)$ führt. Also muß doch $\varphi \in \mathfrak{R}'$ und $\|\varphi\| \leq 1$ gelten. Besitzt $\mathfrak{R}$ ein Einselement 1, so folgt für alle $x \in \mathfrak{R}$: Es ist $\varphi(x) = \varphi(x \cdot 1) = \varphi(x)\varphi(1)$. Da φ nicht identisch verschwindet, folgt $\varphi(1) = 1$ und damit wegen $\|1\| = 1$ auch $\|\varphi\| = 1$. □

13.4. Satz. *Sei $\mathfrak{R}$ eine kommutative Banachalgebra mit Einselement* 1 *über* $\mathbb{C}$.

(a) *Für alle $\varphi \in \Delta(\mathfrak{R})$ ist* $\ker\varphi$ *ein maximales Ideal in $\mathfrak{R}$ und* $\operatorname{codim}\ker\varphi = 1$. *Ferner* $\mathfrak{R} = \ker\varphi \oplus \mathbb{C}\cdot 1$.

(b) *Ist M ein maximales Ideal in $\mathfrak{R}$, so gibt es genau ein $\varphi \in \Delta(\mathfrak{R})$ mit* $\ker\varphi = M$.

Die Zuordnung $\varphi \mapsto \ker\varphi$ definiert also eine Bijektion von $\Delta(\mathfrak{R})$ auf die Menge $\mathfrak{M}(\mathfrak{R})$ aller maximale Ideale in $\mathfrak{R}$.

Beweis. (a) Sei $\varphi \in \Delta(\mathfrak{R})$ beliebig. Nach Lemma 0.13 ist $\ker\varphi$ ein Ideal in $\mathfrak{R}$. Dieses muß wegen der Stetigkeit von φ (vergl. Satz 13.3) abgeschlossen sein. Da φ nicht identisch verschwindet ist $\ker\varphi \neq \mathfrak{R}$ und $\operatorname{ran}\varphi = \mathbb{C}$. Also folgt $\operatorname{codim}\ker\varphi = \dim\mathfrak{R}/\ker\varphi = \dim\operatorname{ran}\varphi = 1$. Insbesondere muß $\ker\varphi$ ein maximales Ideal in $\mathfrak{R}$ sein, da für jedes $\ker\varphi$ echt enthaltende Ideal J in $\mathfrak{R}$ folgt $0 \leq \dim\mathfrak{R}/J < 1$ und somit $J = \mathfrak{R}$.

Es ist $\mathfrak{R} = \ker\varphi \oplus \mathbb{C}\cdot 1$, denn für alle $x \in \mathfrak{R}$ ist $x - \varphi(x)\cdot 1 \in \ker\varphi$.

(b) Sei $M \in \mathfrak{M}(\mathfrak{R})$ beliebig. Nach Lemma 0.17 ist $\mathfrak{R}/M$ ein Körper. Wie in Aufgabe 7.2 gezeigt wurde, ist $\mathfrak{R}/M$ versehen mit der Quotientennorm auch eine Banachalgebra. Durch Übergang zu einer äquivalenten Algebranorm kann man zudem erreichen, daß $\|1 + M\|_{\mathfrak{R}/M} = 1$ ist. Nach dem Satz 7.10 von Mazur und Gelfand ist also $\mathfrak{R}/M$ isometrisch isomorph zu $\mathbb{C}$. Sei $\Phi : \mathfrak{R}/M \to \mathbb{C}$ der hierdurch gegebene Isomorphismus und bezeichne $\pi : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}/M$ den kanonischen Epimorphismus. Dann ist $\Phi\circ\pi \in \Delta(\mathfrak{R})$ mit $\ker\Phi\circ\pi = \ker\pi = M$.

Zur Eindeutigkeitsaussage: Sind $\varphi, \psi \in \Delta(\mathfrak{R})$ mit $\ker\varphi = \ker\psi = M \in \mathfrak{M}(\mathfrak{R})$, so folgt nach (a): $\mathfrak{R} = M \oplus \mathbb{C}\cdot 1$ und hieraus $\varphi = \psi$, den nach Satz 13.3 ist $\varphi(1) = 1 = \psi(1)$. □

13.5. Folgerung. *Sei $\mathfrak{R}$ eine kommutative Banachalgebra mit Einselement* 1 *über* $\mathbb{C}$ *und sei $x \in \mathfrak{R}$.*

(a) $\sigma_{\mathfrak{R}}(x) = \{\varphi(x)\,;\, \varphi \in \Delta(\mathfrak{R})\}$.

(b) *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*
  (i) *x liegt im Radikal* $\operatorname{rad}\mathfrak{R}$ *von $\mathfrak{R}$.*
  (ii) *$\varphi(x) = 0$ für alle $\varphi \in \Delta(\mathfrak{R})$.*
  (iii) $\sigma_{\mathfrak{R}}(x) = \{0\}$.
  (iv) $r(x) = 0$.
  (v) *x ist quasinilpotent.*

(c) *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*
  (i) *$\mathfrak{R}$ ist halbeinfach.*
  (ii) *$\Delta(\mathfrak{R})$ trennt die Punkte von $\mathfrak{R}$.*
  (iii) *Der Spektralradius ist eine Norm auf $\mathfrak{R}$.*

Beweis. (a) Sei $z \in \sigma_{\mathfrak{R}}(x)$ beliebig. Dann ist $z - x$ nicht invertierbar und liegt daher in einem maximalen Ideal M von $\mathfrak{R}$. Wegen $M = \ker\varphi$ für ein $\varphi \in \Delta(\mathfrak{R})$ (nach Satz 13.4) gilt $0 = \varphi(z - x) = z - \varphi(x)$ und damit $z \in \{\psi(x)\,;\, \psi \in \Delta(\mathfrak{R})\}$.

Ist umgekehrt $z = \varphi(x)$ für ein $\varphi \in \Delta(\mathfrak{R})$, so ist $z - x \in \ker\varphi$. Da $\ker\varphi$ ein echtes Ideal ist, ist $z - x$ nicht in $\mathfrak{R}$ invertierbar, d.h. es gilt $z \in \sigma_{\mathfrak{R}}(x)$.

(b) folgt unmittelbar aus (a), Satz 13.4 und Folgerung 8.12.

(c) Nach Satz 8.1 (c) und Folgerung 8.6 ist der Spektralradius r eine submultiplikative Halbnorm auf $\mathfrak{R}$. Diese ist wegen der Äquivalenz von (i) und (iv) in (b) genau dann eine Norm, wenn $\mathrm{rad}\mathfrak{R} = \{0\}$ gilt, d.h. wenn $\mathfrak{R}$ halbeinfach ist. Dies zeigt die Äquivalenz von (i) und (iii).

$\Delta(\mathfrak{R})$ trennt genau dann die Punkte von $\mathfrak{R}$, wenn gilt

$$\forall 0 \neq x \in \mathfrak{R}\, \exists \varphi \in \Delta(\mathfrak{R}) : \quad \varphi(x) \neq 0 \,.$$

Nach (b) ist dies äquivalent zu $\mathrm{rad}\mathfrak{R} = \{0\}$. □

13.6. Satz. *Sei $\mathfrak{R}$ eine kommutative Banachalgebra mit Einselement* 1 *über* $\mathbb{C}$. *Dann ist die Menge $\Delta(\mathfrak{R})$ der multiplikativen linearen Funktionale $\sigma(\mathfrak{R}', \mathfrak{R})$–kompakt. Im folgenden sei $\Delta(\mathfrak{R})$ stets durch die von der schwach*–Topologie induzierten Relativtopologie versehen. Die Abbildung $x \mapsto \hat{x}$ mit $\hat{x}(\varphi) = \varphi(x)$ für alle $x \in \mathfrak{R}, \varphi \in \Delta(\mathfrak{R})$ definiert einen stetigen Algebrenhomomorphismus $\Gamma : \mathfrak{R} \to C(\Delta(\mathfrak{R}))$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(a) $\Gamma(1) = 1$ *und* $\ker\Gamma = \mathrm{rad}\,\mathfrak{R}$.
(b) $\|\hat{x}\|_{\Delta(\mathfrak{R})} = r(x)$ *für alle $x \in \mathfrak{R}$. Hierbei sei $\|\cdot\|_{\Delta(\mathfrak{R})}$ die Supremumsnorm auf $C(\Delta(\mathfrak{R}))$.*
(c) *Für alle $x \in \mathfrak{R}$ gilt $\hat{x}(\varphi) = 0$ genau dann, wenn $x \in \ker\varphi$ gilt.*
(d) *Die Funktionen $\{\hat{x}\,;\, x \in \mathfrak{R}\}$ trennen die Punkte von $\Delta(\mathfrak{R})$.*

$\Gamma : \mathfrak{R} \to C(\Delta(\mathfrak{R}))$ heißt der *Gelfand–Homomorphismus* von $\mathfrak{R}$ nach $C(\Delta(\mathfrak{R}))$.

Beweis. Für alle $x, y \in \mathfrak{R}$ definieren wir:

$$M(x,y) := \{\varphi \in \mathfrak{R}'\,;\, \varphi(xy) - \varphi(x)\varphi(y) = 0\}\,.$$

Offensichtlich sind diese Mengen schwach*–abgeschlossen in $\mathfrak{R}'$. Auch

$$A := \{\varphi \in \mathfrak{R}'\,;\, \varphi(1) = 1\}$$

ist schwach*–abgeschlossen und die Einheitskugel $B_{\mathfrak{R}'}$ des Dualraums von $\mathfrak{R}$ ist nach dem Satz von Banach–Alaoglu (Satz 12.10) sogar schwach*–kompakt. Also ist auch

$$\Delta(\mathfrak{R}) = B_{\mathfrak{R}'} \cap A \cap \bigcap_{x,y \in \mathfrak{R}} M(x,y)$$

schwach*–kompakt.

Nach Definition der schwach*–Topologie $\sigma(\mathfrak{R}', \mathfrak{R})$ sind die Funktionen $\hat{x}$ für alle $x \in \mathfrak{R}$ bezüglich der durch $\sigma(\mathfrak{R}', \mathfrak{R})$ auf $\Delta(\mathfrak{R})$ induzierten Relativtopologie stetig. Die Homomorphieeigenschaften von Γ rechnet man unmittelbar nach.

(a) folgt aus Satz 13.3 und Folgerung 13.5.

(b) Es ist für alle $x \in \mathfrak{R}$:

$$\|x\|_{\Delta(\mathfrak{R})} = \sup_{\varphi \in \Delta(\mathfrak{R})} |\varphi(x)| = \sup_{z \in \sigma_{\mathfrak{R}}(x)} |z| = r(x) \leq \|x\|\,,$$

wobei das mittlere Gleichheitszeichen nach Folgerung 13.5, das nächste nach Satz 8.10 und das $\leq$–Zeichen nach Satz 8.1 gilt.

(c) ist offensichtlich.

(d) Gilt $\hat{x}(\varphi) = \hat{x}(\psi)$ für alle $x \in \mathfrak{R}$, so ist $\varphi(x) = \psi(x)$ für alle $x \in \mathfrak{R}$ und daher $\varphi = \psi$. □

Um auch Gelfandtheorie in kommutativen Banachalgebren ohne Einselement betreiben zu können zeigen wir:

13.7. Lemma. *Sei $\mathfrak{R}$ eine kommutative Banachalgebra über $\mathbb{C}$ ohne Einselement und sei $\mathfrak{R}_1 := \mathfrak{R} \oplus \mathbb{C} \cdot 1$ die durch Adjunktion der Eins entstandene kommutative Banachalgebra mit Einselement (versehen mit der durch $\|x + z1\| := \|x\| + |z|$ für alle $x \in \mathfrak{R}$, $z \in \mathbb{C}$ definierten unitalen Algebranorm). Dann gilt*

(a) $\Delta(\mathfrak{R}_1)$ *versehen mit der von* $\sigma(\mathfrak{R}_1', \mathfrak{R}_1)$ *induzierten Relativtopologie ist homöomorph zu* $\Delta_\infty(\mathfrak{R})$ *versehen mit der durch* $\sigma(\mathfrak{R}', \mathfrak{R})$ *induzierten Relativtopologie. Insbesondere ist* $\Delta_\infty(\mathfrak{R})$ *schwach***–kompakte Teilmenge von* $\mathfrak{R}'$.

(b) *Für alle* $x \in \mathfrak{R}$ *gilt:*
  (i) $\sigma_{\mathfrak{R}_1}(x) = \{0\} \cup \{\varphi(x)\,;\, \varphi \in \Delta(\mathfrak{R})\}$.
  (ii) $r(x) = \begin{cases} 0 & \textit{falls } \Delta(\mathfrak{R}) = \emptyset \\ \sup_{\varphi\in\Delta(\mathfrak{R})} |\varphi(x)| & \textit{sonst.} \end{cases}$

Beweis. (a) Für alle $\varphi \in \Delta(\mathfrak{R}_1)$ und alle $x+z\cdot 1 \in \mathfrak{R}_1$, $x \in \mathfrak{R}$, $z \in \mathbb{C}$, ist $\varphi(x+z\cdot 1) = \varphi(x)+z$ und $\varphi|_{\mathfrak{R}} \in \Delta_\infty(\mathfrak{R})$. Wir definieren daher $\Phi : \Delta(\mathfrak{R}_1) \to \Delta_\infty(\mathfrak{R})$ durch $\Phi(\varphi) := \varphi|_{\mathfrak{R}}$ für alle $\varphi \in \Delta(\mathfrak{R}_1)$. Wegen der schwach*–Kompaktheit von $\Delta(\mathfrak{R}_1)$ und der Separiertheit von $\sigma(\mathfrak{R}', \mathfrak{R})$ genügt es, zu zeigen, daß Φ eine stetige, bijektive Abbildung ist (vergl. Satz 3.8 aus den Grundlagen aus der mengentheoretischen Topologie.

Zur Injektivität: Sind $\varphi, \psi \in \Delta(\mathfrak{R}_1)$ mit $\Phi(\varphi) = \Phi(\psi)$, so folgt für alle $x + z \cdot 1 \in \mathfrak{R}_1$: Es ist $\varphi(x + z \cdot 1) = \varphi(x) + z = \psi(x) + z = \psi(x + z \cdot 1)$ und daher $\varphi = \psi$.

Zur Surjektivität: Ist $\varphi \in \Delta_\infty(\mathfrak{R})$ beliebig, so definiere $\tilde\varphi : \mathfrak{R}_1 \to \mathbb{C}$ durch $\tilde\varphi(x+z\cdot 1) := \varphi(x)+z$ für alle $x+z\cdot 1 \in \mathfrak{R}_1$, $x \in \mathfrak{R}$, $z \in \mathbb{C}$. Man rechnet nach, daß $\tilde\varphi$ ein multiplikatives Funktional ist, für das offensichtlich $\Phi(\tilde\varphi) = \varphi$ gilt.

Zur Stetigkeit: Sei $\varphi \in \Delta(\mathfrak{R}_1)$ beliebig und sei U eine beliebige Umgebung in $\Delta(\mathfrak{R})_\infty$ von $\Phi(\varphi)$ bezüglich der durch die von $\sigma(\mathfrak{R}', \mathfrak{R})$ induzierten Relativtopologie. Dann gibt es endlich viele $x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{R}$ und ein $\varepsilon > 0$ mit

$$V(\Phi(\varphi); x_1, \ldots, x_n, \varepsilon) := \{\psi \in \Delta_\infty(\mathfrak{R})\,;\, |\psi(x_j) - (\Phi(\varphi))(x)| < \varepsilon \text{ für } j = 1, \ldots, n\} \subseteq U\,.$$

Wegen der bereits gezeigten Bijektivität von Φ folgt

$$\begin{aligned} V(\varphi; x_1, \ldots, x_n, \varepsilon) =& \{\psi \in \Delta_\infty(\mathfrak{R})\,;\, |(\Phi^{-1}(\psi))(x_j) - \varphi(x)| < \varepsilon \text{ für } j = 1, \ldots, n\} \\ =& \Phi\left(\{\chi \in \Delta(\mathfrak{R}_1)\,;\, |\chi(x_j) - \varphi(x)| < \varepsilon \text{ für } j = 1, \ldots, n\}\right)\,. \end{aligned}$$

Also ist $\Phi^{-1}(U)$ eine Umgebung von φ in $\Delta(\mathfrak{R}_1)$ bezüglich der von $\sigma(\mathfrak{R}_1', \mathfrak{R}_1)$ induzierten Relativtopologie. Damit ist die Stetigkeit von Φ gezeigt.

(b) Zu (i): Nach Folgerung 13.5 und (a) ist

$$\sigma_{\mathfrak{R}_1}(x) = \{\varphi(x);\, \varphi \in \Delta(\mathfrak{R}_1)\} = \{(\Phi(\varphi))(x);\, \varphi \in \Delta(\mathfrak{R}_1)\} = \{\psi(x);\, \psi \in \Delta_\infty(\mathfrak{R})\}\,.$$

Hieraus folgt die Behauptung.

Zu (ii): Es ist nach Folgerung 13.5 und (a)

$$r(x) = \sup_{z\in\sigma_{\mathfrak{R}_1}(x)} |z| = \sup_{\varphi\in\Delta(\mathfrak{R}_1)} |\varphi(x)| = \sup_{\psi\in\Delta_\infty(\mathfrak{R})} |\psi(x)|.$$

Hieraus folgt (ii). □

Ist Ω ein lokalkompakter topologischer Hausdorffraum, so bezeichnen wir mit $C_\infty(\Omega)$ die Algebra der im Unendlichen verschwindenden, stetigen Funktionen, d.h. $C_\infty(\Omega)$ ist die Menge aller derjenigen stetigen Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{C}$, so daß zu jedem $\varepsilon > 0$ eine kompakte Teilmenge $K_{f,\varepsilon}$ von Ω existiert mit $|f(t)| < \varepsilon$ für alle $t \in \Omega \setminus K_{f,\varepsilon}$. Versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\Omega$ ist $C_\infty(\Omega)$ eine Banachalgebra. Dies rechnet man leicht nach.

13.8. Satz. *Sei* $\mathfrak{R}$ *eine kommutative Banachalgebra über* $\mathbb{C}$ *ohne Einselement mit* $\Delta(\mathfrak{R}) \neq \emptyset$.

(a) $\Delta(\mathfrak{R})$ *ist in der von* $\sigma(\mathfrak{R}', \mathfrak{R})$ *induzierten Topologie lokalkompakt.*

(b) *Der Gelfandhomomorphismus* $x \mapsto \hat{x}$ *mit* $\hat{x}(\varphi) := \varphi(x)$ *für alle* $x \in \mathfrak{R}, \varphi \in \Delta(\mathfrak{R})$ *nimmt seine Werte schon in* $C_\infty(\Delta(\mathfrak{R}))$ *an und es gilt:*

$$\forall x \in \mathfrak{R} : \quad \|\hat{x}\|_{\Delta(\mathfrak{R})} = r(x) \leq \|x\|\,.$$

Beweis. (a) ist klar, da $\Delta_\infty(\mathfrak{R})$ nach Lemma 13.7 schwach*–kompakt ist.

(b) Die Homomorphieeigenschaften des Gelfandhomomorphismus sind offensichtlich. Seien nun $x \in \mathfrak{R}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Die Menge

$$K := \{\varphi \in \Delta_\infty(\mathfrak{R})\,;\, |\varphi(x)| \geq \varepsilon\}$$

ist eine $\sigma(\mathfrak{R}', \mathfrak{R})$–abgeschlossene Menge der nach Lemma 13.7 schwach*–kompakten Menge $\Delta_\infty(\mathfrak{R})$ und somit ebenfalls schwach*–kompakt. Wegen $\varphi_\infty \notin K$ ist $K \subseteq \Delta(\mathfrak{R})$ und für alle $\psi \in \Delta(\mathfrak{R}) \setminus K$ ist $|\hat{x}(\psi)| = |\psi(x)| < \varepsilon$. Der Rest folgt nun mit Hilfe von Lemma 13.7 (b). □

Um in einer Reihe von Beispielen $\Delta(\mathfrak{R})$ bestimmen zu können, zeigen wir:

13.9. Lemma. *Sei K ein kompakter topologischer Hausdorffraum und sei $\mathfrak{R}$ eine Unteralgebra der $\mathbb{C}$–Algebra $C(K) := C(K, \mathbb{C})$ welche die konstante Funktion 1 enthält. Auf $\mathfrak{R}$ sei eine Norm $\|\cdot\|$ gegeben, so daß $(\mathfrak{R}, \|\cdot\|)$ eine Banachalgebra ist. Ferner gelte*

(a) *Für alle $x \in \mathfrak{R}$ ist auch die Funktion $\overline{x}$ (mit $\overline{x}(t) = \overline{x(t)}$ für alle $t \in K$) ein Element von $\mathfrak{R}$.*
(b) *Ist $x(t) \neq 0$ für alle $t \in K$, so ist auch die Funktion $x^{-1} : t \mapsto \frac{1}{x(t)}$ ein Element von $\mathfrak{R}$.*
(c) *$\mathfrak{R}$ trennt die Punkte von K.*

Dann ist $\Delta(\mathfrak{R}) = \{\delta_t\,;\, t \in K\}$ und die Abbildung $t \mapsto \delta_t$ ist eine Homöomorphie von K auf $\Delta(\mathfrak{R})$.

Beweis. Die Inklusion $\{\delta_t\,;\, t \in K\} \subseteq \Delta(\mathfrak{R})$ ist offensichtlich und da $\mathfrak{R}$ die Punkte von K trennt, ist die Abbildung $\delta : t \mapsto \delta_t$ von K nach $\Delta(\mathfrak{R})$ injektiv. Wir zeigen, daß δ auch surjektiv ist. Sei also $\varphi \in \Delta(\mathfrak{R})$ beliebig vorgegeben.

Annahme: $\forall t \in K : \quad \ker\varphi \not\subseteq \ker\delta_t$. Dann gibt es zu jedem $t \in K$ ein $x_t \in \ker\varphi$ mit $x_t(t) \neq 0$. Wegen der Stetigkeit von x_t gibt es noch eine offene Umgebung U_t von t mit $x_t(s) \neq 0$ für alle $s \in U_t$. $(U_t)_{t\in K}$ ist dann eine offene Überdeckung von K, aus der wir wegen der Kompaktheit von K eine endliche Teilüberdeckung auswählen können $U_{t_1}, \ldots, U_{t_k}$ auswählen können. Die Funktion $f : s \mapsto \sum_{j=1}^k x_{t_j}(t)\overline{x_{t_j}}(t)$ ist dann nullstellenfrei und liegt wegen (a) und $x_{t_j} \in \ker\varphi$ ebenfalls in $\ker\varphi$ und damit nicht in $\mathfrak{R}$ invertierbar. Da f nullstellenfrei ist, steht dies im Widerspruch zu (b). Also war die Annahme falsch und es folgt: Es gibt ein $t_0 \in K$ mit $\ker\varphi \subseteq \ker\delta_{t_0}$. Da $\ker\varphi$ und $\ker\delta_{t_0}$ maximale Ideale sind, ist dies nur möglich,wenn $\ker\varphi = \ker\delta_{t_0}$ ist. Wegen Satz 13.4 folgt hieraus $\varphi = \delta_{t_0}$. Damit ist die Surjektivität von φ bewiesen.

Wir zeigen nun die Stetigkeit von $\delta : K \to \Delta(\mathfrak{R})$. Sei $t \in K$ beliebig und sei U eine beliebige Umgebung von δ_t in $\Delta(\mathfrak{R})$ in der von der schwach*–Topologie induzierten Topologie. Dann gibt es endlich viele $x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{R}$ und ein $\varepsilon > 0$ mit

$$V := V(\delta_t; x_1, \ldots, x_n, \varepsilon) := \{\delta_s\,;\, s \in K,\, |\delta_t(x_j) - \delta_s(x_j)| < \varepsilon \text{ für } j = 1, \ldots, n\} \subseteq U\,.$$

Dann ist

$$\delta^{-1}(V) = \{s \in K\,;\, |x_j(t) - x_j(s)| < \varepsilon \text{ für } j = 1, \ldots, n\}$$

wegen der Stetigkeit von $x_1, \ldots, x_n$ offen in K und somit eine Umgebung von t. Damit ist die Stetigkeit von $\delta : K \to \Delta(\mathfrak{R})$ bewiesen. Da δ auch bijektiv und K kompakt ist, muß δ eine Homöomorphie sein. □

Als unmittelbare Folgerung erhalten wir:

13.10. Folgerung. (a) *Sei K ein kompakter topologischer Hausdorffraum. Dann ist die Menge $\Delta(C(K))$ der multiplikativen linearen Funktionale homöomorph zu K vermöge der Abbildung $t \mapsto \delta_t$.*

(b) *Sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall ($a < b$). Dann ist für alle $n \in \mathbb{N}$ durch $t \mapsto \delta_t$ eine Homöomorphie von $[a, b]$ auf $\Delta(C^n([a, b]))$ gegeben.*

13.11. Satz. *Sei $W \subset C(\mathbb{T})$ die Wieneralgebra der Funktionen mit absolutkonvergenter Fourierreihenentwicklung (vergl. Beispiel 13.2 (b)). Dann ist $\Delta(W)$ homöomorph zu $\mathbb{T}$ vermöge der Abbildung $z \mapsto \delta_z$, wobei $\delta_z(f) := f(z)$ für alle $z \in \mathbb{T}$, $f \in W$.*

Beweis. Wir hatten uns schon in Beispiel 13.2 (b) überlegt, daß $\{\delta_z\,;\, z \in \mathbb{T}\} \subseteq \Delta(W)$ gilt. Die hierdurch definierte Abbildung $\delta : \mathbb{T} \to \Delta(W)$ ist injektiv, denn für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{T}$ gilt mit $h := \mathrm{id}_{\mathbb{T}}$: Es ist $\delta_{z_j}(h) = z_j$ und daher $\delta_{z_1} = \delta_{z_2}$ genau dann, wenn $z_1 = z_2$.

Wir zeigen, daß δ auch surjektiv ist. Sei also $\varphi \in \Delta(W)$ beliebig vorgegeben und $h := \mathrm{id}_{\mathbb{T}}$. Dann ist $\|h\|_W = 1$ und h ist invertierbar in W mit $h^{-1}(z) = 1/z$ für alle $z \in \mathbb{T}$. Offensichtlich ist $\|h^{-1}\|_W = 1$. Da $\|\varphi\| = 1$ gilt (nach Satz 13.3), folgt $|\varphi(h)| \le 1$ und $|\varphi(h^{-1})| \le 1$. Wegen $\varphi(h^{-1})\varphi(h) = \varphi(h^{-1} \cdot h) = \varphi(1) = 1$ ist dies nur möglich, wenn $|\varphi(h)| = 1$ und somit $\varphi(h) \in \mathbb{T}$ gilt. Für alle $f \in W$ mit $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ für alle $z \in \mathbb{T}$ gilt $f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n h^n$ mit absoluter Konvergenz. Da φ stetig ist, folgt hieraus

$$\varphi(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \varphi(h^n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (\varphi(h))^n = \delta_{\varphi(h)}(f).$$

Also ist $\varphi(f) = \delta_{\varphi(h)}(f)$ und die Surjektivität von δ ist gezeigt.

Wie im Beweis von Lemma 13.9 zeigt man nun, daß δ eine Homöomorphie ist. □

Als Folgerung erhalten wir folgenden Satz von Wiener:

13.12. Folgerung. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 2π–periodische Funktion mit absolutkonvergenter Fourierreihenentwicklung. Besitzt f keine Nullstelle in $\mathbb{R}$, so hat auch die Funktion $1/f : t \mapsto 1/f(t)$ eine absolutkonvergente Fourierreihenentwicklung.*

Beweis. Sei also f mit

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

ohne Nullstelle in $\mathbb{R}$, $(a_n)_{n=-\infty}^{\infty} \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Dann ist die Funktion $\tilde{f} : z \mapsto \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ in W und hat keine Nullstelle in $\mathbb{T}$. Also folgt mit Satz 13.11 und Folgerung 13.5:

$$0 \notin \{\tilde{f}(z)\,;\, z \in \mathbb{T}\} = \{\varphi(\tilde{f})\,;\, \varphi \in \Delta(W)\} = \sigma_W(\tilde{f}),$$

d.h. die Existenz von $1/\tilde{f}$ in W. Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $g(t) := 1/\tilde{f}(e^{it})$ für alle $t \in \mathbb{R}$ erfüllt dann $f(t)g(t) \equiv 1$ und besitzt eine absolutkonvergente Fourierreihenentwicklung. □

Übungsaufgaben zu Kapitel 13.

13.1. Aufgabe. Zeigen Sie, daß es für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ unendlich viele paarweise verschiedenen maximale Ideale $\mathcal{I}$ in der Banachalgebra $C_b(\mathbb{D})$ der stetigen und beschränkten Funktionen auf $\mathbb{D}$ gibt mit

$$\{f \in \mathcal{R} \,:\, \tilde{f}(z) = 0\} \subset \mathcal{I}.$$

Hierbei sei $\mathcal{R}$ die abgeschlossene Unteralgebra aller auf $\mathbb{D}$ beschränkten, stetigen Funktionen f, die eine stetige Fortsetzung $\tilde{f}$ auf $\overline{\mathbb{D}}$ besitzen.

13.2. Aufgabe. Seien $(\mathfrak{R}_j, \|\cdot\|_j)$, $j = 1, 2$, zwei kommutative Banachalgebren über $\mathbb{C}$ mit Einselementen $1_{\mathfrak{R}_1}, 1_{\mathfrak{R}_2}$. Zeigen Sie: Ist $\Phi : \mathfrak{R}_1 \to \mathfrak{R}_2$ ein (nicht notwendig stetiger) Algebrenhomomorphismus mit $\Phi(1_{\mathfrak{R}_1}) = 1_{\mathfrak{R}_2}$, so ist die durch $\phi \mapsto \phi \circ \Phi$ gegebene Abbildung von $\Delta(\mathfrak{R}_2)$ nach $\Delta(\mathfrak{R}_1)$ stetig, wenn man $\Delta(\mathfrak{R}_j)$ mit der von $\sigma(\mathfrak{R}_j', \mathfrak{R}_j)$ induzierten Relativtopologie versieht.

13.3. Aufgabe. Sei $A(\mathbb{D})$ die in Aufgabe 7.7 eingeführte Diskalgebra.

(a) Zeigen Sie, daß die Polynome in z dicht liegen in $A(\mathbb{D})$.
(b) Zeigen Sie, daß die multiplikativen Linearformen auf $A(\mathbb{D})$ genau die Punktauswertungen auf $\overline{\mathbb{D}}$ sind.
(c) Seien $f_1, \ldots, f_k$ Funktionen in $A(\mathbb{D})$ und zu jedem $z \in \overline{\mathbb{D}}$ gebe es ein $j \in \{1, \ldots, k\}$ mit $f_j(z) \neq 0$. Dann existieren Funktionen $\Phi_1, \ldots, \Phi_k \in A(\mathbb{D})$ mit $\sum_{i=1}^k f_i \Phi_i \equiv 1$ auf $\overline{\mathbb{D}}$.

13.4. Aufgabe. Sei A eine kommutative Banachalgebra mit Eins 1 und seien $a_1, \ldots, a_n \in A$. Das *gemeinsame Spektrum* von $a_1, \ldots, a_n$ in A ist definiert als

$$\sigma_A(a_1, \ldots, a_n) := \{(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)) \,:\, \varphi \in \Delta(A)\}.$$

(a) Zeigen Sie: $\sigma_A(a_1, \ldots, a_n)$ ist eine nicht leere, kompakte Teilmenge des $\mathbb{C}^n$.
(b) Für $j = 1, \ldots, n$ sei $\pi_j : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ die Projektion auf die j-te Koordinate. Zeigen Sie:

$$\pi_j(\sigma_A(a_1, \ldots, a_n)) = \sigma_A(a_j) \qquad \forall 1 \leq j \leq n.$$

(c) Zeigen Sie: Der Punkt $(z_1, \ldots, z_n)$ liegt genau dann in $\sigma_A(a_1, \ldots, a_n)$, wenn das von $z_1 \cdot 1 - a_1, \ldots, z_n \cdot 1 - a_n$ erzeugte Ideal von A echt ist.

13.5. Aufgabe. Bestimmen Sie den Gelfand-Raum der *Sandwichalgebra*

$$S(\mathbb{D}) = \{f \in C(\overline{\mathbb{D}}) \,:\, \text{ es gibt ein } g \in A(\mathbb{D}) \text{ mit } g|_{\partial\mathbb{D}} = f|_{\partial\mathbb{D}}\}.$$

Hierbei sei $S(\mathbb{D})$ versehen mit der sup–Norm.

13.6. Aufgabe. Sei $H^\infty(\mathbb{D})$ sei die Banachalgebra aller auf $\mathbb{D}$ holomorphen, beschränkten Funktionen (versehen mit der sup-Norm). Zeigen Sie:

(a) Für alle $z_0 \in \mathbb{D}$ und $f \in H^\infty(\mathbb{D})$ ist die Funktion

$$z \mapsto \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \qquad (z \in \mathbb{D})$$

in z_0 holomorph ergänzbar und beschränkt.
(b) Es gibt eine stetige injektive Abbildung $\psi : \mathbb{D} \to \Delta(H^\infty(\mathbb{D}))$.
(c) Es gibt eine stetige surjektive Abbildung $\pi : \Delta(H^\infty(\mathbb{D})) \to \overline{\mathbb{D}}$ derart, daß $\pi|_{\mathbb{D}} = \mathrm{id}_{\mathbb{D}}$. Insbesondere sind $\mathbb{D}$ und das Bild von $\mathbb{D}$ in $\Delta(H^\infty(\mathbb{D}))$ homöomorph.

KAPITEL 14

Der Šilovrand

In diesem Kapitel wollen wir die Frage untersuchen, wann sich ein maximales Ideal in einer Unteralgebra $\mathfrak{A}$ einer komplexen kommutativen Banachalgebra $\mathfrak{R}$ mit Einselement zu einem maximalen Ideal in $\mathfrak{R}$ erweitern läßt. Sei also im folgenden $\mathfrak{R}$ stets eine kommutative Banachalgebra mit Einselement 1 über $\mathbb{C}$.

14.1. Definition. Unter einer *maximierenden Teilmenge* von $\Delta(\mathfrak{R})$ verstehen wir eine abgeschlossene, nicht leere Menge $F \subseteq \Delta(\mathfrak{R})$ mit

$$\forall x \in \mathfrak{R} : \qquad r(x) = \|\hat{x}\|_{\Delta(\mathfrak{R})} = \|\hat{x}\|_F . \tag{14.1}$$

Die Menge aller maximierenden Teilmengen von $\Delta(\mathfrak{R})$ bezeichnen wir mit $\mathcal{M}(\Delta(\mathfrak{R}))$.

Insbesondere ist also $\Delta(\mathfrak{R})$ selbst eine maximierende Teilmenge von sich.

14.2. Satz. *Es gibt genau eine minimale maximierende Teilmenge $S(\mathfrak{R})$ von $\Delta(\mathfrak{R})$. $S(\mathfrak{R})$ heißt der Šilovrand von $\mathfrak{R}$. Es gilt:*

$$S(\mathfrak{R}) = \bigcap_{F \in \mathcal{M}(\Delta(\mathfrak{R}))} F$$

Beweis. (a) *Existenz:* Die Menge $\mathcal{M}(\Delta(\mathfrak{R}))$ aller maximierenden Teilmengen von $\Delta(\mathfrak{R})$ ist durch die Inklusion teilweise geordnet und wegen $\Delta(\mathfrak{R}) \in \mathcal{M}(\Delta(\mathfrak{R}))$ nicht leer. Wir zeigen mit Hilfe des Zornschen Lemmas, daß $\mathcal{M}(\Delta(\mathfrak{R}))$ ein minimales Element besitzt. Sei $\mathcal{K}$ eine beliebige totalgeordnete Teilmenge von $\mathcal{M}(\Delta(\mathfrak{R}))$. Wegen der Kompaktheit von $\Delta(\mathfrak{R})$ sind alle $K \in \mathcal{K}$ nicht leere kompakte Teilmengen von $\Delta(\mathfrak{R})$. Da $\mathcal{K}$ totalgeordnet ist, folgt wegen der endlichen Durchschnittseigenschaft kompakter Mengen, daß die Menge

$$K_0 := \bigcap_{K \in \mathcal{K}} K$$

nicht leer und kompakt (also auch abgeschlossen in $\Delta(\mathfrak{R})$) ist. Wir zeigen, daß K_0 auch maximierend und damit eine untere Schranke für $\mathcal{K}$ in $\mathcal{M}(\Delta(\mathfrak{R}))$ ist. Für alle $x \in \mathfrak{R}$ ist wegen der Stetigkeit der Gelfandtransformierten $\hat{x}$ von x und der Kompaktheit von $\Delta(\mathfrak{R})$ die Menge

$$S_x := \{\varphi \in \Delta(\mathfrak{R})\,;\, |\varphi(x)| = |\hat{x}(\varphi)| = \|\hat{x}\|_{\Delta(\mathfrak{R})}\}$$

abgeschlossen und nicht leer. Da die Elemente von $\mathcal{K}$ maximierende Teilmengen von $\Delta(\mathfrak{R})$ sind, gilt $\|\hat{x}\|_K = \|\hat{x}\|_{\Delta(\mathfrak{R})}$ und somit $K \cap S_x \neq \emptyset$ für alle $K \in \mathcal{K}, x \in \mathfrak{R}$. Wegen der endlichen Durchschnittseigenschaft kompakter Mengen folgt auch

$$K_0 \cap S_x = \bigcap_{K \in \mathcal{K}} K \cap S_x \neq \emptyset$$

für alle $x \in \mathfrak{R}$. Also ist K_0 maximierend und somit eine untere Schranke für $\mathcal{K}$ in $\mathcal{M}(\Delta(\mathfrak{R}))$. Nach dem Zornschen Lemma besitzt $\mathcal{M}(\Delta(\mathfrak{R}))$ daher wenigstens ein minimales Element.

(b) *Eindeutigkeit:* Sei S eine minimale maximierende Teilmenge von $\Delta(\mathfrak{R})$ und sei $\varphi \in S$ beliebig. Sei V eine beliebige Umgebung von φ in $\Delta(\mathfrak{R})$. Dann gibt es endlich viele $y_1, \ldots, y_n \in \mathfrak{R}$ und ein $\varepsilon > 0$ mit

$$U := \{\psi \in \Delta(\mathfrak{R})\,;\, |\psi(y_j) - \varphi(y_j)| < \varepsilon \text{ für } j = 1, \ldots, n\} \subseteq V.$$

Mit $x_j := y_j - \varphi(y_j)1$ folgt $\psi(x_j) = \psi(y_j) - \varphi(y_j)$ und somit

$$U = \{\psi \in \Delta(\mathfrak{R})\,;\, |\psi(x_j)| < \varepsilon \text{ für } j = 1, \ldots, n\}\,.$$

Da S minimales Element von $\mathcal{M}(\Delta(\mathfrak{R}))$ ist, gibt es ein $y \in S$ mit

$$r(y) = \|\hat{y}\|_{\Delta(\mathfrak{R})} = \sup_{\psi \in U} |\hat{y}(\psi)| > \sup_{\psi \in S \setminus U} |\hat{y}(\psi)|\,.$$

Gäbe es nämlich kein solches y, so wäre $S \setminus U$ eine echt kleinere minimale maximierende Teilmenge von $\Delta(\mathfrak{R})$. Indem wir notfalls y durch $r(y)^{-1}y$ ersetzen, können wir erreichen, daß

$$\sup_{\psi \in S \setminus U} |\hat{y}(\psi)| < r(y) = 1$$

gilt. Für hinreichend großes $m \in \mathbb{N}$ gilt dann

$$\sup_{\psi \in S \setminus U} |\widehat{y^m}(\psi)| < \frac{\varepsilon}{\max_{1 \le j \le n} \|x_j\|}\,.$$

Damit folgt für $j = 1, \ldots, n$:

$$\begin{aligned}\max_{\psi \in \Delta(\mathfrak{R})} |\widehat{y^m}(\psi)\hat{x}_j(\psi)| &= \max_{\psi \in S} |\widehat{y^m}(\psi)\hat{x}_j(\psi)| \\ &= \max\left\{ \sup_{\psi \in S \setminus U} |\widehat{y^m}(\psi)\hat{x}_j(\psi)|\,,\ \sup_{\psi \in S \cap U} |\widehat{y^m}(\psi)\hat{x}_j(\psi)| \right\} < \varepsilon\,.\end{aligned}$$

Ist nun $F \in \mathcal{M}(\Delta(\mathfrak{R}))$ beliebig gegeben, so gibt es, da F maximierend ist, ein $\varphi_0 \in F$ mit $1 = r(y^m) = |\widehat{y^m}(\varphi_0)|$. Damit erhalten wir für $j = 1, \ldots, n$:

$$|\hat{x}_j(\varphi_0)| = |\widehat{y^m}(\varphi_0)\hat{x}_j(\varphi_0)|\,.$$

Also ist $\varphi_0 \in U \subseteq V$. Für alle $\varphi \in S$ enthält also jede Umgebung V von φ Punkte aus F. Da F abgeschlossen ist folgt $\varphi \in F$. Wegen $S \in \mathcal{M}(\Delta(\mathfrak{R}))$ folgt

$$S = \bigcap_{F \in \mathcal{M}(\Delta(\mathfrak{R}))} F$$

und damit insbesondere auch die Eindeutigkeit des minimalen Elementes von $\mathcal{M}(\Delta(\mathfrak{R}))$. □

14.3. Beispiele. (a) Für jeden kompakten Hausdorffraum K gilt

$$S(C(K)) = \{\delta_t\,;\, t \in K\} = \Delta(C(K))\,.$$

(b) Die Diskalgebra $\mathcal{A}(\mathbb{D}) = C(\overline{\mathbb{D}}) \cap \mathcal{O}(\mathbb{D})$ ist, versehen mit der Supremumsnorm eine kommutative Banachalgebra mit Einselement 1. Es gilt:

$$\Delta(\mathcal{A}(\mathbb{D})) = \{\delta_z\,;\, z \in \overline{\mathbb{D}}\} \quad \text{und} \quad S(\mathcal{A}(\mathbb{D})) = \{\delta_z\,;\, z \in \partial\mathbb{D}\}\,.$$

Beweis in den Übungen.

14.4. Satz. *Für alle $x \in \mathfrak{R}$ gilt $\partial\sigma_{\mathfrak{R}}(x) \subseteq \hat{x}(S(\mathfrak{R}))$.*

Beweis. Sei $z_0 \in \partial\sigma_{\mathfrak{R}}(x) \setminus \hat{x}(S(\mathfrak{R}))$ beliebig. Wegen der Stetigkeit von $\hat{x}$ und der Kompaktheit von $S(\mathfrak{R})$ folgt

$$\delta := \inf_{\varphi\in S(\mathfrak{R})} |\hat{x}(\varphi) - z_0| = \min_{\varphi\in S(\mathfrak{R})} |\hat{x}(\varphi) - z_0| > 0\,.$$

Da z_0 im topologischen Rand von $\sigma_{\mathfrak{R}}(x)$ liegt gibt es ein $z_1 \in \rho_{\mathfrak{R}}(x)$ mit $|z_1 - z_0| < \delta/2$ und es folgt für alle $\varphi \in S(\mathfrak{R})$:

$$|\hat{x}(\varphi) - z_1| \geq |\hat{x}(\varphi) - z_0| - |z_1 - z_0| > \frac{\delta}{2}$$

und somit

$$r((x - z_1)^{-1}) = \max_{\varphi\in S(\mathfrak{R})} \left|\frac{1}{\hat{x}(\varphi) - z_1}\right| < \frac{2}{\delta}\,. \tag{14.2}$$

Andererseits ist $z_0 \in \sigma_{\mathfrak{R}}(x)$ und daher $z_0 = \hat{x}(\varphi_0) = \varphi_0(x)$ für ein $\varphi_0 \in \Delta(\mathfrak{R})$. Es folgt mit (14.2):

$$\frac{2}{\delta} > r((x - z_1)^{-1}) \geq |\varphi_0((x - z_1)^{-1})| = \left|\frac{1}{\varphi_0(x) - z_1}\right| = \frac{1}{|z_0 - z_1|} > \frac{2}{\delta}\,.$$

Da dies unmöglich ist kann es keinen Punkt $z_0 \in \partial\sigma_{\mathfrak{R}}(x) \setminus \hat{x}(S(\mathfrak{R}))$ geben, d.h. die Menge $\partial\sigma_{\mathfrak{R}}(x) \setminus \hat{x}(S(\mathfrak{R}))$ ist leer und es folgt $\partial\sigma_{\mathfrak{R}}(x) \subseteq \hat{x}(S(\mathfrak{R}))$. □

Eine weitere Charakterisierung des Šilovrandes wird im folgenden Satz angegeben:

14.5. Satz. *Für ein nicht triviales multiplikatives Funktional φ auf $\mathfrak{R}$ sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) $\varphi \in S(\mathfrak{R})$.

(b) *Zu jeder in der auf $\Delta(\mathfrak{R})$ durch $\sigma(\mathfrak{R}', \mathfrak{R})$ gegebenen Relativtopologie offenen Umgebung U von φ existiert ein $y \in \mathfrak{R}$ mit*

$$\sup_{\psi\in\Delta(\mathfrak{R})\setminus U} |\hat{y}(\psi)| < \sup_{\psi\in U} |\hat{y}(\psi)|\,.$$

Beweis. "(a)$\Longrightarrow$(b)" Ist (b) nicht erfüllt für ein $\varphi \in \Delta(\mathfrak{R})$, so gibt es eine in der auf $\Delta(\mathfrak{R})$ durch $\sigma(\mathfrak{R}', \mathfrak{R})$ gegebenen Relativtopologie offenen Umgebung U von φ, so daß für alle $y \in \mathfrak{R}$ gilt

$$\sup_{\psi\in\Delta(\mathfrak{R})\setminus U} |\hat{y}(\psi)| \geq \sup_{\psi\in U} |\hat{y}(\psi)|\,.$$

$\Delta(\mathfrak{R}) \setminus U$ ist also eine maximierende Teilmenge von $\Delta(\mathfrak{R})$ und muß daher nach Satz 14.2 den Šilovrand $S(\mathfrak{R})$ enthalten. Insbesondere kann φ dann nicht im Šilovrand von $\mathfrak{R}$ liegen.

"(b)$\Longrightarrow$(a)" Hat $\varphi \in \Delta(\mathfrak{R})$ die Eigenschaft (b), so ist $U \cap S(\mathfrak{R}) \neq \emptyset$ für alle in der auf $\Delta(\mathfrak{R})$ durch $\sigma(\mathfrak{R}', \mathfrak{R})$ gegebenen Relativtopologie offenen Umgebungen U von φ. Also gilt $\varphi \in \overline{S(\mathfrak{R})} = S(\mathfrak{R})$. □

Für eine Banachalgebra $\mathfrak{A}$ und ein $x \in \mathfrak{A}$ sei $r_{\mathfrak{A}}(x)$ der Spektralradius von x in $\mathfrak{A}$.

14.6. Satz. *Sei $\mathfrak{R}$ eine kommutative komplexe Banachalgebra mit Einselement* 1.

(a) *Ist $\Phi : \mathfrak{R} \to \mathfrak{A}$ ein (nicht notwendig stetiger) Homomorphismus von $\mathfrak{R}$ in eine kommutative komplexe Banachalgebra $\mathfrak{A}$ mit Einselement $1_{\mathfrak{A}}$, für den gilt:*

$$\Phi(1) = 1_{\mathfrak{A}} \quad \textit{und} \quad r_{\mathfrak{A}}(\Phi(x)) = r_{\mathfrak{R}}(x) \quad \textit{für alle } x \in \mathfrak{R}\,, \tag{14.3}$$

so gilt $S(\mathfrak{R}) \subseteq \{\varphi \circ \Phi\,;\, \varphi \in S(\mathfrak{A})\}$. Der Šilovrand von $\mathfrak{R}$ ist die größte Teilmenge von $\Delta(\mathfrak{R})$ mit dieser Eigenschaft für alle möglichen Wahlen von $\mathfrak{A}$ und Φ mit(14.3).

(b) *Für jede kommutative, komplexe Banachalgebra $\mathfrak{A} \supseteq \mathfrak{R}$ mit dem selben Einselement* 1 *und mit der Eigenschaft*

$$r_{\mathfrak{A}}(x) = r_{\mathfrak{R}}(x) \quad \textit{für alle } x \in \mathfrak{R} \tag{14.4}$$

läßt sich jedes Funktional aus $S(\mathfrak{R})$ fortsetzen zu einem multiplikativen Funktional auf $\mathfrak{A}$. Ist $\mathfrak{R}$ zusätzlich halbeinfach, so ist $S(\mathfrak{R})$ maximal mit dieser Eigenschaft für alle möglichen Wahlen von $\mathfrak{A}$.

Beweis. (i) Wegen der Stetigkeit der Abbildung $\Phi^{\#} : \Delta(\mathfrak{A}) \to \Delta(\mathfrak{R})$, $\varphi \mapsto \varphi \circ \Phi$, (nach Aufgabe 13.2) und der Kompaktheit von $S(\mathfrak{A})$ ist

$$\Phi^{\#}(S(\mathfrak{A})) = \{\varphi \circ \Phi\,;\, \varphi \in S(\mathfrak{A})\}$$

kompakt und damit auch abgeschlossen in $\Delta(\mathfrak{R})$. Für alle $x \in \mathfrak{R}$ gilt

$$\|\hat{x}\|_{\Phi^{\#}(S(\mathfrak{A}))} = \sup_{\varphi \in S(\mathfrak{A})} |\varphi(\Phi(x))| = \sup_{\varphi \in S(\mathfrak{A})} |\widehat{\Phi(x)}(\varphi)| = r_{\mathfrak{A}}(\Phi(x)) = r_{\mathfrak{R}}(x) = \|\hat{x}\|_{\Delta(\mathfrak{R})}\,.$$

$\Phi^{\#}(S(\mathfrak{A}))$ ist also eine maximierende Teilmenge von $\Delta(\mathfrak{R})$ und muß daher nach Satz14.2 den Šilovrand von $\mathfrak{R}$ als Teilmenge enthalten.

(ii) Um die Maximalitätsaussage zu erhalten betrachten wir speziell $\mathfrak{A} := C(S(\mathfrak{R}))$ (versehen mit der Supremumsnorm) und die Abbildung $\Phi : \mathfrak{R} \to \mathfrak{A}$ mit $\Phi(x) := \hat{x}|_{S(\mathfrak{R})}$ für alle $x \in \mathfrak{R}$. Offensichtlich ist Φ ein Algebrenhomomorphismus mit $\Phi(1) = 1$. Nach Beispiel 14.3 (a) und Folgerung 13.10 gilt $S(\mathfrak{A}) = \Delta(\mathfrak{A}) = \{\delta_\varphi\,;\, \varphi \in S(\mathfrak{R})\}$. Für alle $x \in \mathfrak{R}$ gilt dann

$$r_{\mathfrak{A}}(\Phi(x)) = \sup_{\varphi \in S(\mathfrak{R})} |\widehat{\Phi(x)}(\delta_\varphi)| = \sup_{\varphi \in S(\mathfrak{R})} |\hat{x}(\varphi)| = \sup_{\varphi \in \Delta(\mathfrak{R})} |\hat{x}(\varphi)| = r_{\mathfrak{R}}(x)\,,$$

so daß die Bedingung (14.3) erfüllt ist. Wegen $\Phi^{\#}(S(\mathfrak{A})) = \{\delta_\varphi \circ \Phi\,;\, \varphi \in S(\mathfrak{R})\} = S(\mathfrak{R})$ folgt die Maximalitätsaussage und (a) ist bewiesen.

(iii) Ist $\mathfrak{R}$ Unteralgebra einer Banachalgebra $\mathfrak{A}$, so daß (14.4) gilt, so ist die Inklusionsabbildung $\Phi : x \mapsto x$ ein Monomorphismus der die Bedingung (14.3) erfüllt. Wegen (a) gibt es also zu jedem $\varphi \in S(\mathfrak{R})$ ein $\psi \in S(\mathfrak{A}) \subseteq \Delta(\mathfrak{A})$ mit $\psi(x) = \psi(\Phi(x)) = \varphi(x)$ für alle $x \in \mathfrak{R}$. Jedes $\varphi \in S(\mathfrak{R})$ besitzt also eine Fortsetzung zu einem $\psi \in S(\mathfrak{A}) \subseteq \Delta(\mathfrak{A})$.

(iv) Ist $\mathfrak{R}$ zusätzlich halbeinfach, so gilt für den Homomorphismus $\Phi : x \mapsto \hat{x}|_{S(\mathfrak{R})}$ aus (ii) und alle $x \in \mathfrak{R}$: Es ist $\Phi(x) = 0$ genau dann, wenn $0 = \|\hat{x}\|_{S(\mathfrak{R})} = \|\hat{x}\|_{\Delta(\mathfrak{R})} = r_{\mathfrak{R}}(x)$ gilt. Da $\mathfrak{R}$ halbeinfach ist, gilt dies genau dann, wenn $x = 0$ ist. Φ ist also in diesem Fall eine Einbettung vermöge der wir $\mathfrak{R}$ als Unteralgebra von $\mathfrak{A} = C(S(\mathfrak{R}))$ auffassen können, die (14.4) erfüllt. Nach (ii) folgt nun die Maximalitätsaussage in (b). □

14.7. Folgerung. *Ist $\mathfrak{A}$ eine kommutative komplexe Banachalgebra mit Einselement* 1 *und ist $\mathfrak{R}$ eine abgeschlossene Unteralgebra von $\mathfrak{A}$ mit $1 \in \mathfrak{R}$, so läßt sich jedes Funktional aus $S(\mathfrak{R})$ fortsetzen zu einem multiplikativen Funktional auf $\mathfrak{A}$.*

Dies folgt unmittelbar aus Satz 14.6, da für alle $x \in \mathfrak{R}$ gilt $r_{\mathfrak{R}}(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} = r_{\mathfrak{A}}(x)$.

Übungsaufgaben zu Kapitel 14.

14.1. Aufgabe. Brechnen Sie die Šilovränder der beiden folgenden Banachalgebren:

(a) $(C(K), \|\cdot\|_K)$ (K ein kompakter Hausdorffraum) (b) $(A(\mathbb{D}), \|\cdot\|_{\overline{\mathbb{D}}})$

Hinweis zu (a): Verwenden Sie ohne Beweis das folgende Lemma von Urysohn: *Sind A, B abgeschlossene disjunkte Teilmengen eines kompakten Hausdorffraums K, so gibt es eine stetige Funktion $f : K \to [0,1]$ mit $f|_A \equiv 0$ und $f|_B \equiv 1$.*

14.2. AUFGABE. Sei A_W die Menge aller Potenzreihen $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit

$$\|f\|_{A_W} := \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

(a) Zeigen Sie, daß $(A_W, \|\cdot\|_W)$ bzgl. der punktweisen Operationen der Addition und der Multiplikation mit Skalaren eine Banachalgebra ist mit $A_W \subset A(\mathbb{D})$.
(b) Berechnen Sie $\Delta(A_W)$ und $S(A_W)$.

14.3. AUFGABE. Berechnen Sie den Šilovrand der Sandwichalgebra aus Aufgabe 13.5

Literaturverzeichnis

[1] ALBRECHT, ERNST, Funktionentheorie, Vorlesungsskript, Universität des Saarlandes, SS 2007.
[2] ALBRECHT, ERNST, Topologie, Vorlesungsskript, Universität des Saarlandes, SS 2007.
[3] ARENS, RICHARD, Dense inverse limit rings, *Michigan Math. J.* **5** (1958), 169–182.
[4] ALT, H.W., *Lineare Funktionalanalysis*, Springer, Berlin Heidelberg New York 1985.
[5] BOURBAKI, NICOLAS, *Topologie générale*, Chapitre II, Hermann, Paris 1960.
[6] CONWAY, JOHN B., *A Course in Functional Analysis*, Springer, Berlin 1996.
[7] DOBROWOLSKI, MANFRED, *Angewandte Funktionalanalysis*, Springer, Berlin Heidelberg 2005.
[8] DUNFORD, NELSON AND SCHWARTZ,JACK T., *Linear Operators I: General Theory*, Wiley-Interscience, New York 1958.
[9] DUNFORD, NELSON AND SCHWARTZ,JACK T., *Linear Operators II:Spectral theory. Self adjoint operators in Hilbert space*, Wiley-Interscience, New York 1963.
[10] DUNFORD, NELSON AND SCHWARTZ,JACK T., *Linear Operators III: Spectral Operators*, Wiley-Interscience, New York 1971.
[11] GROTHENDIECK, ALEXANDER, *Topological Vector Spaces* Gordon and Breach, New York-London-Paris 1973.
[12] HEUSER, HARRO, *Funktionalanalysis*, Teubner, Stuttgart 1986.
[13] JARCHOW, HANS, *Locally Convex Spaces* Teubner, Stuttgart 1981.
[14] KABALLO, WINFRIED, *Einführung in die Analysis II*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg-Berlin-Oxford 1997.
[15] KAMKE *Mengenlehre*, Sammlung Göschen **999/999a**, Walter deGuyter & Co, Berlin 1962.
[16] KÖTHE, GOTTFRIED, *Topological Vector Spaces I*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1969.
[17] KÖTHE, GOTTFRIED, *Topological Vector Spaces II*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1979.
[18] MATHIEU, MARTIN, *Funktionalanalysis*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg-Berlin-Oxford.
[19] MEISE, REINHOLD UND VOGT, DIETMAR, *Einführung in die Funktionalanalysis*, Vieweg,
[20] RUDIN, WALTER, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill 1970.
[21] RUDIN, WALTER, *Functional Analysis*, McGraw-Hill 1973.
[22] SCHAEAEFER, HELMUT H., *Topological Vector Spaces*, Springer 1971.
[23] SCHRÖDER, HERBERT, *Funktionalanalysis*, Akademieverlag, Berlin 1997.
[24] WERNER, DIRK, *Funktionalanalysis*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York 2002.
[25] YOSIDA, KÔSAKU, *Functional Analysis*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1995.

Index