



Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie 2 (WS 2008/09)
Blatt 1

Aufgabe 1. Zeigen Sie: Die durch

$$h(z) := \frac{z}{e^z - 1}$$

auf $\mathbb{C} \setminus 2\pi i\mathbb{Z}$ definierte Funktion h ist in 0 holomorph durch $h(0) = 1$ ergänzbar und besitzt die in einer Umgebung von 0 konvergente Potenzreihendarstellung

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n.$$

Hierbei ist $(B_n)_{n=0}^{\infty}$ die Folge der Bernoullizahlen. Diese ist definiert durch $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$ und die Rekursionsformel

$$\sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} B_k = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Geben Sie auch den Konvergenzradius der Potenzreihe an.

Aufgabe 2 (Frullani-Integrale 1). Seien $a, b > 0$ und sei $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, für die das uneigentliche Riemann-Integral

$$\int_1^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx$$

existiert. Zeigen Sie:

(a) Das uneigentliche Riemann-Integral $\int_0^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx$ existiert und es gilt

$$\int_0^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \log\left(\frac{b}{a}\right).$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst

$$\int_{\delta}^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \int_{\delta a}^{\delta b} \frac{f(x)}{x} dx \quad \text{für alle } \delta > 0.$$

(b) Für alle $t > 0$ gilt:

$$\log(t) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x} - e^{-tx}}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{\cos(x) - \cos(tx)}{x} dx.$$

Aufgabe* 3 (Frullani-Integrale 2). Seien $a, b > 0$ und sei $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, für die der Grenzwert $f(\infty) := \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ existiert.

(a) Zeigen Sie: Das uneigentliche Riemann-Integral $\int_0^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx$ existiert und es gilt

$$\int_0^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = (f(0) - f(\infty)) \log\left(\frac{b}{a}\right).$$

(b) Berechnen Sie die uneigentlichen Integrale

$$\int_0^{\infty} \frac{\arctan(ax) - \arctan(bx)}{x} \quad \text{und} \quad \int_0^{\infty} \frac{\tanh(ax) - \tanh(bx)}{x}.$$

Abgabetermin: Montag, 03.11.2008, vor der Vorlesung.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter
http://www.math.uni-sb.de/~ag/albrecht/ws08_09/ft2/ft2-ueb.html

Informationen zum Erwerb eines Leistungsnachweises

Sie können zu dieser Vorlesung einen (benoteten) Leistungsnachweis erwerben. Die Voraussetzungen hierfür sind:

- (a) **erfolgreiche Teilnahme am Übungsbetrieb**, d.h.
 - **ernsthafte** Bearbeitung von mindestens 60 % der gestellten Übungsaufgaben,
 - **mindestens** 40 % aller erreichbaren Punkte,
 - aktive Mitarbeit in der Übungsgruppe,**und**
- (b) **Bestehen der mündlichen Prüfung am Ende des Semesters.**