UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 - MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie 2 (WS 2008/09)
Blatt 2

Aufgabe 1. Die durch

$$f(z) := \frac{1}{z^2}\Big(\frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} - 1\Big)$$

auf $\mathbb{C} \setminus 2\pi i\mathbb{Z}$ definierte Funktion ist offensichtlich auf $\mathbb{C}$ meromorph. Zeigen Sie:

(a) f ist eine gerade Funktion und in 0 holomorph durch $f(0) := 1/12$ ergänzbar.

(b) Für alle $z \in G := \mathbb{C} \setminus \{n2\pi i\,;\, 0 \neq n \in \mathbb{Z}\}$ gilt

$$f(z) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 + 4\pi^2 n^2}\,.$$

(c) f ist auf $[0, \infty)$ monoton fallend mit $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$.

(d) f besitzt in $\{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| < 2\pi\}$ die Potenzreihendarstellung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{n+2}}{(n+2)!} z^n\,.$$

Hierbei ist $(B_n)_{n=0}^{\infty}$ die Folge der Bernoullizahlen. Da f nach (a) eine gerade Funktion ist, folgt insbesondere $B_{2k+1} = 0$ für alle $k \geq 1$ und somit

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2(n+1)}}{(2n+2)!} z^{2n}\,.$$

Hinweis: Verwenden Sie

$$f(z) = \frac{1}{z^2}\Big(\frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2}\Big) - \frac{1}{z^2} = \frac{1}{2z}\Big(\frac{2}{e^z - 1} + 1\Big) - \frac{1}{z^2} = \frac{1}{2z}\coth\Big(\frac{z}{2}\Big) - \frac{1}{z^2}$$

und die aus der Funktionentheorie bekannte Mittag–Leffler–Entwicklung für die Kotangensfunktion.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $n = 2^{n-1}\prod_{r=1}^{n-1}\sin\left(\frac{r}{n}\pi\right)$.

Hinweis: Beachten Sie $x^n - 1 = \prod_{r=1}^{n}\left(x - \exp\left(i\frac{r}{n}2\pi\right)\right)$ und bilden Sie den Grenzwert $\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}$.

Aufgabe* 3. Zeigen Sie, daß für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z) > -1$ die folgende Formel gilt:

$$\int_0^1 \Big(\log\big(\frac{1}{u}\big)\Big)^z du = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt\,.$$

Dies zeigt, daß diese beiden Eulerschen Integrale die gleiche Funktion darstellen (nämlich $z \mapsto z! = \Gamma(z+1)$).

Hinweis: Verwenden Sie die Variablensubstitution $t = \log(1/u)$.

Abgabetermin: Montag, 10.11.2008, vor der Vorlesung.
Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter
`http://www.math.uni-sb.de/~ag/albrecht/ws08_09/ft2/ft2-ueb.html`