



Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie 2 (WS 2008/09)
Blatt 3

Aufgabe 1. Zeigen Sie:

- (a) Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)$ gilt $\Gamma(\bar{z}) = \overline{\Gamma(z)}$.
(b) Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\left| \Gamma\left(\frac{1}{2} + it\right) \right| = \sqrt{\frac{\pi}{\cosh(\pi t)}}.$$

Hinweis: Eulersche Reflexionsformel:

Aufgabe 2. Sei $\mathbb{H}_r := \{z \in \mathbb{C} ; \operatorname{Re} z > 0\}$ die offene, rechte Halbebene. Die *Beta-Funktion* $B : \mathbb{H}_r \times \mathbb{H}_r \rightarrow \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$B(\alpha, \beta) := \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^{\beta-1} dt \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{H}_r).$$

Zeigen Sie, daß für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{H}_r$ gilt:

(a) $B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$

Hinweis: Führen Sie in dem Doppelintegral

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \int_0^\infty \int_0^\infty t^{\alpha-1} s^{\beta-1} e^{-t-s} dt ds$$

die Variablensubstitution $s = ur, t = (1-r)u$ durch.

(b) $B(\alpha, \beta) = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}} dx.$

Aufgabe* 3. Verwenden Sie Aufgabe 1 und die Verdoppelungsformel von Legendre zum Beweis von

$$\forall 0 \neq t \in \mathbb{R} : \quad \left| \frac{\Gamma(2it)}{\Gamma(it)} \right| = \frac{1}{2\sqrt{\cosh(\pi t)}}.$$

Abgabetermin: Montag, 17.11.2008, vor der Vorlesung.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

http://www.math.uni-sb.de/~ag/albrecht/ws08_09/ft2/ft2-ueb.html