UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 - MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie 2 (WS 2008/09)
Blatt 4

Aufgabe 1. Zeigen Sie, daß für alle $z, w \in \mathbb{H}_r$ gilt

$$\int_0^\infty e^{-wt} t^{z-1}\, dt = \frac{\Gamma(z)}{w^z}\,.$$

Hinweis: Für $\mathrm{Im}(w) = 0$ folgt dies leicht mit einer geeigneten Variablensubstitution.

Aufgabe 2. Für alle $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\binom{z}{n} := \frac{z(z-1)\cdot \ldots \cdot (z-n-1)}{n!} \quad \text{und} \quad \binom{z}{0} := 1\,.$$

Zeigen Sie, dass für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \Gamma(-z) n^{z+1} \binom{z}{n} = 1\,.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst:

$$\binom{z}{n} = \frac{(-1)^n \Gamma(n-z)}{\Gamma(-z)\Gamma(n+1)}\,.$$

Aufgabe* 3. Verwenden Sie die Eulersche Darstellung der Gammafunktion (Formel (1.23) der Vorlesung) und eine geeignete Variablensubstitution zur Berechnung von $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$.

Abgabetermin: Montag, 24.11.2008, vor der Vorlesung.
Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter
`http://www.math.uni-sb.de/~ag/albrecht/ws08_09/ft2/ft2-ueb.html`