UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 - MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie 2 (WS 2008/09)
Blatt 6

Aufgabe 1. Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge positiver Zahlen. Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=1} a_n^{-z}$ in den Fällen

(a) $a_n = n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
(b) $a_n = p_n$, p_n die n-te Primzahl, $n \in \mathbb{N}$,
(c) $a_n = c^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit einer Konstanten $c > 0$?

Zeigen Sie, dass die vorstehenden Reihen im Inneren ihres Konvergenzbereiches holomorph sind.

Aufgabe 2. Für welche $z \in \mathbb{C}$ existiert in den folgenden Beispielen die Laplace-Transformierte

$$F(z) := \int_0^{\infty} f(t)e^{-tz}dt\,?$$

(a) $f(t) = t^n$ für alle $t \in [0, \infty)$ und ein $n \in \mathbb{N}$.
(b) $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{für } t > 1\,. \end{cases}$.

Sind diese Laplace-Transformierten im Inneren ihres Existenzbereiches holomorph?

Aufgabe* 3. Die Fourier-Laplace-Transformierte einer auf $\mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbaren Funktion f ist definiert durch

$$\hat{f}(z) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-itz}dt$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ für die dieses Integral existiert.

(a) Zeigen Sie, dass die Fourier-Laplace-Transformation einer integrierbaren Funktion, die außerhalb eines kompakten Intervalls identisch verschwindet eine ganze Funktion ist.
(b) Berechnen Sie die Fourier-Laplace-Transformierte der durch

$$f(t) := \begin{cases} 1 & \text{für } |t| \le 1 \\ 0 & \text{für } |t| > 1\,. \end{cases}$$

definierten Funktion.

Abgabetermin: Montag, 08.12.2008, vor der Vorlesung.
Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter
`http://www.math.uni-sb.de/~ag/albrecht/ws08_09/ft2/ft2-ueb.html`