



Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie 2 (WS 2008/09)
Blatt 8

Aufgabe 1. Für alle $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$a_n := \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{falls } n = p^k \text{ für eine Primzahl } p \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie:

- (a) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-z}$ konvergiert auf $\mathbb{H}_1$ kompakt und punktweise absolut gegen eine auf $\mathbb{H}_1$ holomorphe Funktion L_ζ .
- (b) Für alle $z \in \mathbb{H}_1$ gilt $\zeta(z) = \exp(L_\zeta(z))$.

Hinweis zu (b): Zeigen Sie zunächst

$$\forall z \in \mathbb{H}_1 : \quad h(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} p_m^{-z} = \sum_{m=1}^{\infty} -\log(1 - p_m^{-z}).$$

Hierbei sei $(p_m)_{m=1}^{\infty}$ die Folge der der Größe nach durchnummerierten Primzahlen und $\log$ der Hauptzweig der Logarithmusfunktion.

Aufgabe 2. Für $x \leq 2$ definieren wir den *Integrallogarithmus* von x durch

$$Li(x) := \int_2^x \frac{1}{\log t} dt.$$

Zeigen Sie:

$$Li(x) = \frac{x}{\log x} (1 + s(x)) \quad \text{mit } s(x) = O\left(\frac{1}{\log x}\right) \quad \text{für } x \rightarrow \infty.$$

Hinweis: Partielle Integration.

Aufgabe* 3. Zeigen Sie, dass für die logarithmische Ableitung der Zeta-Funktion in $\mathbb{H}_1$ gilt

$$\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = - \sum_{n=1}^{\infty} \log(p_n) \sum_{k=1}^{\infty} p_n^{-kz}$$

mit absoluter Konvergenz. Hierbei sei $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ die Folge der der Größe nach durchnummerierten Primzahlen.

Hinweis: Erinnern Sie sich an Lemma 1.7 der Vorlesung und die Produktdarstellung der Zeta-Funktion.

Abgabetermin: Montag, 05.01.2009, vor der Vorlesung.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

http://www.math.uni-sb.de/~ag/albrecht/ws08_09/ft2/ft2-ueb.html

Wir wünschen Ihnen ein frohes Weihnachtsfest und alles Gute für 2009!

*

||