UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 - MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie 2 (WS 2008/09)
Blatt 9

Aufgabe 1. Zeigen Sie: Für alle $z \in \mathbb{H}_1$ gilt mit

$$\Lambda_n : \begin{cases} \log p & \text{falls } n = p^k \text{ für eine Primzahl } p \text{ und ein } k \in \mathbb{N} \text{ ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für die logarithmische Ableitung der Zetafunktion:

$$\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_n n^{-z}$$

Aufgabe 2. Sei $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und sei $f \in C^1(a,b)$ eine auf (a,b) absolut integrierbare, beschränkte Funktion, für die auch die Ableitung f' absolut auf (a,b) integrierbar ist. Zeigen Sie: Für alle $x > 0$ ist auch die Funktion $t \mapsto f(t)x^{it}$ auf (a,b) absolut integrierbar und es gibt eine von Konstante $C = C(f) > 0$, so dass für alle $x > 0$ gilt

$$\left| \int_a^b f(t)x^{it}\, dt \right| \leq \frac{C}{\log x}.$$

Hinweis: Partielle Integration.

Aufgabe* 3. Für reelles $x > 0$ sei $A(x)$ die Menge aller p^n von Primzahlpotenzen der Ordnung $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$, mit $p^n \leq x$. Sei ferner $N(x)$ die Anzahl der Elemente von $A(x)$. Zeigen Sie: Es gibt eine Konstante $C > 0$ mit $N(x) \leq C\sqrt{x}$ für alle $x > 0$.
Hinweis: Zeigen Sie hierzu:

(a) Für alle Primzahlpotenzen $p^n \leq x$ mit $n \geq 2$ gilt $n \leq \frac{\log x}{\log 2}$.
(b)
$$N(x) \leq \sum_{2 \leq n \leq \frac{\log x}{\log 2}} \sqrt[n]{x} \leq \sqrt{x} + \sum_{3 \leq n \leq \frac{\log x}{\log 2}} \sqrt[n]{x}.$$

Schätzen Sie anschließend geeignet ab.

Abgabetermin: Montag, 12.01.2009, vor der Vorlesung.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter
`http://www.math.uni-sb.de/~ag/albrecht/ws08_09/ft2/ft2-ueb.html`