



Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie 2 (WS 2008/09)
Blatt 11

Aufgabe 1. Zeigen Sie

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{x^z}{z^2} dz = \begin{cases} 0 & \text{falls } 0 < x < 1 \\ \log x & \text{falls } x \geq 1. \end{cases}$$

Aufgabe 2. Zeigen Sie für die hypergeometrische Reihe $F(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; z)$ mit $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{C}$ und $b_1, \dots, b_q \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)$ gilt:

- (a) Ist $p \leq q$, so ist die Reihe für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergent.
- (b) Ist $p = q + 1$, so ist sie für alle $z \in \mathbb{D}$ absolut konvergent.
- (c) Ist $p > q + 1$ und $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)$, so ist die Reihe für alle $0 \neq z \in \mathbb{C}$ divergent.

Aufgabe* 3. Zeigen Sie für die hypergeometrische Reihe $F(a_1, \dots, a_{q+1}; b_1, \dots, b_q; z)$ mit $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{C}$ und $b_1, \dots, b_q \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)$ gilt:

- (a) Ist

$$\operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^q b_j - \sum_{j=1}^{q+1} a_j \right) > 0,$$

so ist die Reihe für alle $z \in \mathbb{T}$ konvergent.

- (b) Ist

$$\operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^q b_j - \sum_{j=1}^{q+1} a_j \right) \leq -1,$$

so ist die Reihe (im nicht abbrechenden Fall) für alle $z \in \mathbb{T}$ divergent.

Abgabetermin: Montag, 26.01.2009, vor der Vorlesung.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter
<http://www.math.uni-sb.de/~ag/albrecht/ws08-09/ft2/ft2-ueb.html>