



Übungen zur Vorlesung Lokale Methoden in der Spektraltheorie 1
(Wintersemester 2008/09)
Blatt 1

Aufgabe 1. Sei $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ eine Banachalgebra mit Einselement 1. Zeigen Sie: Ist \mathcal{I} ein echtes Links-, Rechts- oder zweiseitiges Ideal in \mathcal{B} , so ist auch die Abschließung $\overline{\mathcal{I}}$ ein echtes Links- bzw. Rechts- bzw. zweiseitiges Ideal in \mathcal{B} .

Aufgabe 2. Sei \mathcal{B} eine C^* -Algebra (nicht notwendig mit einem Einselement). Für alle $a \in \mathcal{B}$ definieren wir $L(a) \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ durch $L(a)x := ax$ für alle $x \in \mathcal{B}$. Die hierdurch definierte Abbildung $L : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{B})$ (*linksreguläre Darstellung* von \mathcal{B} genannt) ist offensichtlich ein Algebrenhomomorphismus. Wir definieren

$$\mathcal{B}^\sharp := \{L(a) + \alpha 1; a \in \mathcal{B}, \alpha \in \mathbb{C}\}$$

und versehen \mathcal{B}^\sharp mit der auf \mathcal{B}^\sharp eingeschränkten Operatornorm von $\mathcal{L}(\mathcal{B})$. Zeigen Sie:

- $L : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}^\sharp$ ist ein isometrischer Monomorphismus.
- Besitzt \mathcal{B} ein Einselement, so ist L ein isometrischer Isomorphismus.
- Besitzt \mathcal{B} kein Einselement, so ist $L(\mathcal{B})$ ein zweiseitiges Ideal in \mathcal{B}^\sharp von der Kodimension 1.

Aufgabe* 3. Sei \mathcal{B} eine C^* -Algebra mit Einselement 1 und seien $a, b \in \mathcal{B}$ positive Elemente mit $a \leq b$. Zeigen Sie:

- $a \leq \|a\|1$.
- $\|a\| \leq \|b\|$.

Hinweis: Verwenden Sie den aus der Funktionalanalysis bekannten Funktionalkalkül für normale (und damit insbesondere auch für positive) Elemente in C^* -Algebren mit Einselement.

Abgabetermin: Freitag, 31.10.2008, vor der Vorlesung.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter
http://www.math.uni-sb.de/~ag/albrecht/ws08_09/spektral/spektral-ueb.html

Raumänderung: Am 31.10.08 findet die Vorlesung ausnahmsweise im Seminarraum 5, Gebäude E 2 4 statt.

Informationen zum Erwerb eines Leistungsnachweises

Sie können zu dieser Vorlesung einen (benoteten) Leistungsnachweis erwerben. Die Voraussetzungen hierfür sind:

- erfolgreiche Teilnahme am Übungsbetrieb**, d.h.
 - **ernsthafte** Bearbeitung von mindestens 60 % der gestellten Übungsaufgaben,
 - **mindestens** 40 % aller erreichbaren Punkte,
 - aktive Mitarbeit in der Übungsgruppe,**und**
- Bestehen der mündlichen Prüfung am Ende des Semesters.**