UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 - MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht

Übungen zur Vorlesung Lokale Methoden in der Spektraltheorie 1 (Wintersemester 2008/09) Blatt 1

Aufgabe 1. Sei $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ eine Banachalgebra mit Einselement 1. Zeigen Sie: Ist $\mathcal{I}$ ein echtes Links–, Rechts– oder zweiseitiges Ideal in $\mathcal{B}$, so ist auch die Abschließung $\overline{\mathcal{I}}$ ein echtes Links– bzw. Rechts– bzw. zweiseitiges Ideal in $\mathcal{B}$.

Aufgabe 2. Sei $\mathcal{B}$ eine C^*–Algebra (nicht notwendig mit einem Einselement). Für alle $a \in \mathcal{B}$ definieren wir $L(a) \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ durch $L(a)x := ax$ für alle $x \in \mathcal{B}$. Die hierdurch definierte Abbildung $L : \mathcal{B} \to \mathcal{L}(\mathcal{B})$ (*linksreguläre Darstellung* von $\mathcal{B}$ genannt) ist offensichtlich ein Algebrenhomomorphismus. Wir definieren

$$\mathcal{B}^\sharp := \{L(a) + \alpha 1\,;\, a \in \mathcal{B},\, \alpha \in \mathbb{C}\}$$

und versehen $\mathcal{B}^\sharp$ mit der auf $\mathcal{B}^\sharp$ eingeschränkten Operatornorm von $\mathcal{L}(\mathcal{B})$. Zeigen Sie:

(a) $L : \mathcal{B} \to \mathcal{B}^\sharp$ ist ein isometrischer Monomorphismus.
(b) Besitzt $\mathcal{B}$ ein Einselement, so ist L ein isometrischer Isomorphismus.
(c) Besitzt $\mathcal{B}$ kein Einselement, so ist $L(\mathcal{B})$ ein zweiseitiges Ideal in $\mathcal{B}^\sharp$ von der Kodimension 1.

Aufgabe* 3. Sei $\mathcal{B}$ eine C^*–Algebra mit Einselement 1 und seien $a, b \in \mathcal{B}$ positive Elemente mit $a \le b$. Zeigen Sie:

(a) $a \le \|a\|1$.
(b) $\|a\| \le \|b\|$.

Hinweis: Verwenden Sie den aus der Funktionalanalysis bekannten Funktionalkalkül für normale (und damit insbesondere auch für positive) Elemente in C^*–Algebren mit Einselement.

Abgabetermin: Freitag, 31.10.2008, vor der Vorlesung.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter
`http://www.math.uni-sb.de/~ag/albrecht/ws08_09/spektral/spektral-ueb.html`

Raumänderung: Am 31.10.08 findet die Vorlesung ausnahmsweise im Seminarraum 5, Gebäude E 2 4 statt.

Informationen zum Erwerb eines Leistungsnachweises

Sie können zu dieser Vorlesung einen (benoteten) Leistungsnachweis erwerben. Die Voraussetzungen hierfür sind:

(a) **erfolgreiche Teilnahme am Übungsbetrieb**, d.h.
- **ernsthafte** Bearbeitung von mindestens 60 % der gestellten Übungsaufgaben,
- **mindestens** 40 % aller erreichbaren Punkte,
- aktive Mitarbeit in der Übungsgruppe,

und

(b) **Bestehen der mündlichen Prüfung am Ende des Semesters**.