UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 - MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht

Übungen zur Vorlesung Lokale Methoden in der Spektraltheorie 1 (Wintersemester 2008/09) Blatt 2

Aufgabe 1. Sei $\mathcal{B}$ eine C^*–Algebra (nicht notwendig mit einem Einselement). Zeigen Sie:

(a) Für $a \in \mathcal{B}$ gilt $a \geq 0$ genau dann, wenn es ein positives Element $b \in \mathcal{B}$ gibt mit $b^2 = a$.
(b) Ist $a \in \mathcal{B}$ hermitesch, so gibt es positive Elemente $u, v \in \mathcal{B}$ mit $uv = vu = 0$ und $a = u - v$.
(c) Jedes Element von $\mathcal{B}$ ist Linearkombination von vier positiven Elementen von $\mathcal{B}$.

Aufgabe 2. Sei $\mathcal{B}$ eine C^*–Algebra und seien $a, b \in \mathcal{B}$ hermitesch mit $a \leq b$. Zeigen Sie:

(a) Für alle $x \in \mathcal{B}$ gilt $x^*ax \leq x^*bx$.
(b) Sind a, b invertierbar mit $0 \leq a \leq b$, so gilt $0 \leq b^{-1} \leq a^{-1}$ in $\mathcal{B}^\sharp$.
Hinweis: Verwenden Sie (a) und Aufgabe 1 (a).

Aufgabe* 3. Sei $\mathcal{B}$ eine C^*–Algebra und seien $a, b \in \mathcal{B}$ hermitesch mit $a \leq b$. Zeigen Sie:

Für alle $\alpha > 0$ mit $\sigma_{\mathcal{B}^\sharp}(a) \cup \sigma_{\mathcal{B}^\sharp}(b) \subseteq I_\alpha := (1/\alpha, \infty)$ gilt $(1 + \alpha a)^{-1}a, (1 + \alpha b)^{-1}b \in \mathcal{B}$ und $(1 + \alpha a)^{-1}a \leq (1 + \alpha b)^{-1}b$.

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 2 (b) und die Darstellung

$$\frac{t}{1 + \alpha t} = \frac{1}{\alpha}\Big(1 - \frac{1}{1 + \alpha t}\Big), \qquad (t > 1/\alpha).$$

Abgabetermin: Freitag, 07.11.2008, vor der Vorlesung.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter
`http://www.math.uni-sb.de/~ag/albrecht/ws08_09/spektral/spektral-ueb.html`