UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 - MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht

Übungen zur Vorlesung Lokale Methoden in der Spektraltheorie 1 (Wintersemester 2008/09) Blatt 3

Aufgabe 1. Wir betrachten die Menge $\mathcal{C} := C([0,1], M_2(\mathbb{C}))$ aller auf $[0,1]$ stetigen Funktionen mit Werten in der Menge aller 2×2-Matrizen über $\mathbb{C}$. Versehen mit den punktweisen Operationen der Addition, der Multiplikation, der Multiplikation mit Skalaren und der durch die punktweise Adjungiertenbildung definierten Involution sowie der durch

$$\|A\| := \sup_{t\in[0,1]} \|A(t)\|_s \qquad (A \in C([0,1], M_2(\mathbb{C})))$$

definierten Norm ist dies eine C^*–Algebra. Hierbei sei $\|\cdot\|_s$ die Operatornorm auf $\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ bezüglich der euklidischen Norm auf $\mathbb{C}^2$.

(a) Zeigen Sie. dass $\|\cdot\|$ tatsächlich eine C^*–Norm auf $C([0,1], M_2(\mathbb{C}))$ ist.
(b) Berechnen Sie das Zentrum $\mathcal{Z}$ von $C([0,1], M_2(\mathbb{C}))$.
(c) Geben Sie die Menge $\Delta(\mathcal{Z})$ aller nichtrivialen multiplikativen linearen Funktionale und die Menge $\Delta_{\mathcal{C}}(\mathcal{Z})$ aller nichtrivialen $\mathcal{C}$–erweiterbaren multiplikativen linearen Funktionale auf $\mathcal{Z}$ an.

Aufgabe 2. Sei $\mathcal{C}$ die C^*–Algebra aus der vorhergehenden Aufgabe und sei $\mathcal{B}$ die Menge aller derjenigen Matrixfunktionen

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \in \mathcal{C}\,,$$

die den folgenden Bedingungen genügen:

$a_{1,1}(0) = a_{2,2}(1)$ und $a_{j,k}(0) = a_{j,k}(1) = 0$ für alle $j, k \in \{1, 2\}$ mit $j \neq k$.

(a) Zeigen Sie, daß $\mathcal{B}$ eine abgeschlossene C^*–Unteralgebra von $\mathcal{C}$ ist.
(b) Berechnen Sie alle multiplikativen linearen Funktionale von $\mathcal{B}$.
(c) Berechnen Sie $Z(\mathcal{B})$ sowie $\Delta(Z(\mathcal{B}))$ und $\Delta_{\mathcal{B}}(Z(\mathcal{B}))$.

Aufgabe* 3. Seien $\mathcal{C}$, $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{B}$ wie in den beiden vorhergehenden Aufgaben. Berechnen Sie für alle $\varphi \in \Delta_{\mathcal{C}}(\mathcal{Z})$ bzw. alle $\varphi \in \Delta_{\mathcal{B}}(Z(\mathcal{B}))$ und alle $A \in \mathcal{B}$ die zu φ gehörige lokale Banachalgebra $\mathcal{C}_\varphi$ bzw. $\mathcal{B}_\varphi$ und das Spektrum von $\pi_\varphi(A)$ in $\mathcal{C}_\varphi$ bzw. in $\mathcal{B}_\varphi$.

Abgabetermin: Freitag, 14.11.2008, vor der Vorlesung.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter
`http://www.math.uni-sb.de/~ag/albrecht/ws08_09/spektral/spektral-ueb.html`