UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 - MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht

Übungen zur Vorlesung Lokale Methoden in der Spektraltheorie 1 (Wintersemester 2008/09) Blatt 4

Aufgabe 1. Sei $\mathcal{A}$ eine C^*–Algebra. Zeigen Sie: Ist $\mathcal{J}$ ein zweiseitiges Ideal und $\mathcal{B}$ eine C^*–Unteralgebra von $\mathcal{A}$, so ist $\mathcal{B}+\mathcal{J}$ eine C^*–Unteralgebra von $\mathcal{A}$.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst daß der allgemeine Fall der Aufgabenstellung sich zurückführen läßt auf den den Fall, daß $\mathcal{A}$ ein Einselement 1 besitzt und daß $1 \in \mathcal{B}$ gilt. Verifizieren Sie in dieser Situation, daß $\mathcal{B}/(\mathcal{B}\cap\mathcal{J})$ in kanonischer Weise eine C^*–Algebra ist und daß durch $b+\mathcal{B}\cap\mathcal{J} \mapsto b+\mathcal{J}$ ein $*$–Monomorphismus von $\mathcal{B}/(\mathcal{B}\cap\mathcal{J})$ nach $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ gegeben ist. Schließen Sie sodann auf die Abgeschlossenheit von $\mathcal{B}+\mathcal{J}$.

Aufgabe 2. Sei $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ eine C^*–Algebra mit Einselement 1 und sei $\mathcal{S}$ eine Teilmenge von $\mathcal{S}$, so daß die von $\mathcal{S}$ in $\mathcal{B}$ algebraisch erzeugte Unteralgebra $\mathcal{S}_0$ von $\mathcal{B}$ dicht in $\mathcal{B}$ liegt. Mit $\operatorname{com}(\mathcal{S})$ bezeichnen wir das kleinste, abgeschlossene, zweiseitige Ideal in $\mathcal{B}$ das alle *Kommutatoren*

$$ab - ba\,, \qquad (a, b \in \mathcal{S})$$

von $\mathcal{S}$ enthält. Wir nennen $\operatorname{com}(\mathcal{S})$ das *Kommutatorideal* von $\mathcal{S}$ in $\mathcal{B}$. Zeigen Sie:

(a) $\operatorname{com}(\mathcal{S}) = \operatorname{com}(\mathcal{S}_0) = \operatorname{com}(\mathcal{B})$.
(b) Die Quotientenalgebra $\mathcal{B}/\operatorname{com}(\mathcal{S})$ ist eine kommutative C^*–Algebra.

Aufgabe* 3. Sei $(X, \|\cdot\|)$ einer der Banachräume $(C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_{\mathbb{T}})$, $(L^p(\mathbb{T}), \|\cdot\|_p)$ mit $1 \leq p < \infty$. Für alle $w \in \mathbb{T}$ definieren wir eine Abbildung T_w durch

$$(T_w f)(z) := f(z/w) = f(z\overline{w}) \qquad (f \in X,\, z \in \mathbb{T}).$$

Zeigen Sie:

(a) Für alle $w \in \mathbb{T}$ ist T_w eine lineare Isometrie von X auf sich.
(b) Für alle $f \in X$ ist durch

$$F(w) := T_w f \qquad (w \in \mathbb{T})$$

eine auf $\mathbb{T}$ stetige X–wertige Funktion gegeben.

Abgabetermin: Freitag, 21.11.2008, vor der Vorlesung.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter
`http://www.math.uni-sb.de/~ag/albrecht/ws08_09/spektral/spektral-ueb.html`