



Übungen zur Vorlesung Lokale Methoden in der Spektraltheorie 1
(Wintersemester 2008/09)
Blatt 6

Aufgabe 1. Zeigen Sie: Mit den Bezeichnungen der vorherigen Aufgaben gilt für alle $f \in L^1(\mathbb{T})$:

(a) Die durch

$$P(f, z) := \int_{\mathbb{T}} P(z/\zeta) f(\zeta) dm(\zeta) \quad (z \in \mathbb{D})$$

definierte Funktion $P(f, \cdot)$ ist auf $\mathbb{D}$ harmonisch.

(b) Für alle $r \in [0, 1)$, $t \in [-\pi, \pi]$ gilt

$$P(f, re^{it}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n r^{|n|} e^{int}.$$

Hierbei sei $\hat{f}_n$ der n -te Fourierkoeffizient von f für alle $n \in \mathbb{Z}$.

(c) Für alle $r \in [0, 1)$ ist $P(f, r \cdot) : z \mapsto P(f, rz)$ in $L^1(\mathbb{T})$ und erfüllt

$$P(f, r \cdot) = \int_{\mathbb{T}} P(r\zeta) T_{\zeta} f dm(\zeta).$$

Aufgabe 2. Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ einer der Banachräume $(C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_{\mathbb{T}})$, $(L^p(\mathbb{T}), \|\cdot\|_p)$ mit $1 \leq p < \infty$. Zeigen Sie, daß für alle $f \in X$ die folgenden Aussagen gelten:

(a) Für alle $r \in (0, 1]$ gilt $\|P(f, r \cdot)\|_X \leq \|f\|_X$.

(b) $\lim_{r \rightarrow 1^-} P(f, r \cdot) = f$ in $(X, \|\cdot\|)$.

(c) Ist die Funktion $P(f, \cdot)$ auf $\mathbb{D}$ reellwertig, so ist auch f reellwertig.

Aufgabe* 3. Zeigen Sie: Für alle $f \in H^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p \leq \infty$ ist die Funktion $z \mapsto P(f, z)$ auf $\mathbb{D}$ holomorph und es gilt $\|P(f, r \cdot)\|_p \leq \|f\|_p$.

Abgabetermin: Freitag, 05.12.2008, vor der Vorlesung.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

http://www.math.uni-sb.de/~ag/albrecht/ws08_09/spektral/spektral-ueb.html