



Übungen zur Vorlesung Lokale Methoden in der Spektraltheorie 1
(Wintersemester 2008/09)
Blatt 7

Aufgabe 1 (Arithmetik innerer Funktionen). Mit Hilfe des Satzes von Beurling kann man Teilbarkeitseigenschaften innerer Funktionen studieren: Sind θ_1, θ_2 zwei innere Funktionen auf \mathbb{T} , so nennen wir θ_1 einen *Teiler* von θ_2 und schreiben $\theta_1 | \theta_2$, falls eine innere Funktion θ_0 existiert mit $\theta_2 = \theta_0 \theta_1$ *m-fast* überall auf \mathbb{T} . Zeigen Sie:

(a) Sind θ_1, θ_2 innere Funktionen auf \mathbb{T} , so gilt:

$$\theta_1 | \theta_2 \iff \theta_1 H^2(\mathbb{T}) \subseteq \theta_2 H^2(\mathbb{T}).$$

(b) Zu je endlich vielen inneren Funktionen $\theta_1, \dots, \theta_n$ auf \mathbb{T} gibt es ein *kleinstes gemeinsames Vielfaches* (kgV) in der Menge der inneren Funktionen, d.h. eine innere Funktion θ_0 mit $\theta_j | \theta_0$ für $j = 1, \dots, n$ und mit der Eigenschaft, daß $\theta_0 | \theta$ für alle inneren Funktionen θ mit $\theta_j | \theta$ für $j = 1, \dots, n$ gilt.

(c) Zu je endlich vielen inneren Funktionen $\theta_1, \dots, \theta_n$ auf \mathbb{T} gibt es einen *größten gemeinsamen Teiler* (ggT) in der Menge der inneren Funktionen, d.h. eine innere Funktion θ_0 mit $\theta_0 | \theta_j$ für $j = 1, \dots, n$ und mit der Eigenschaft, daß $\theta | \theta_0$ für alle inneren Funktionen θ mit $\theta | \theta_j$ für $j = 1, \dots, n$ gilt.

Hinweis zu (b) und (c) betrachten Sie die abgeschlossenen Unterräume

$$\mathcal{M}_\Sigma := \overline{\text{LH} \left(\bigcup_{j=1}^n M_{\theta_j}(H^2(\mathbb{T})) \right)} \quad \text{und} \quad \mathcal{M}_\Delta := \bigcap_{j=1}^n M_{\theta_j}(H^2(\mathbb{T})).$$

Aufgabe 2. Zeigen Sie, daß für alle $a \in \mathbb{T}$ die Funktion

$$f_a : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \exp \left(- \frac{a+z}{a-z} \right)$$

eine innere Funktion ist.

Abgabetermin: Freitag, 12.12.2008, vor der Vorlesung.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter

http://www.math.uni-sb.de/~ag/albrecht/ws08_09/spektral/spektral-ueb.html