UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 - MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht

Übungen zur Vorlesung Lokale Methoden in der Spektraltheorie 1 (Wintersemester 2008/09) Blatt 7

Aufgabe 1 (Arithmetik innerer Funktionen)**.** Mit Hilfe des Satzes von Beurling kann man Teilbarkeitseigenschaften innerer Funktionen studieren: Sind θ_1, θ_2 zwei innere Funktionen auf $\mathbb{T}$, so nennen wir θ_1 einen *Teiler* von θ_2 und schreiben $\theta_1 \big| \theta_2$, falls eine innere Funktion θ_0 existiert mit $\theta_2 = \theta_0 \theta_1$ m-fast überall auf $\mathbb{T}$. Zeigen Sie:

(a) Sind θ_1, θ_2 innere Funktionen auf $\mathbb{T}$, so gilt:
$$\theta_1 \big| \theta_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \theta_1 H^2(\mathbb{T}) \subseteq \theta_2 H^2(\mathbb{T}).$$

(b) Zu je endlich vielen inneren Funktionen $\theta_1, \dots, \theta_n$ auf $\mathbb{T}$ gibt es ein *kleinstes gemeinsames Vielfaches* (kgV) in der Menge der inneren Funktionen, d.h. eine innere Funktion θ_0 mit $\theta_j \big| \theta_0$ für $j = 1, \dots, n$ und mit der Eigenschaft, daß $\theta_0 \big| \theta$ für alle inneren Funktionen θ mit $\theta_j \big| \theta$ für $j = 1, \dots, n$ gilt.

(c) Zu je endlich vielen inneren Funktionen $\theta_1, \dots, \theta_n$ auf $\mathbb{T}$ gibt es einen *größten gemeinsamen Teiler* (ggT) in der Menge der inneren Funktionen, d.h. eine innere Funktion θ_0 mit $\theta_0 \big| \theta_j$ für $j = 1, \dots, n$ und mit der Eigenschaft, daß $\theta \big| \theta_0$ für alle inneren Funktionen θ mit $\theta \big| \theta_j$ für $j = 1, \dots, n$ gilt.

Hinweis zu (b) und (c) betrachten Sie die abgeschlossenen Unterräume
$$\mathcal{M}_\Sigma := \overline{\mathrm{LH}\Big(\bigcup_{j=1}^n M_{\theta_j}(H^2(\mathbb{T}))\Big)} \qquad \text{und} \qquad \mathcal{M}_\Delta := \bigcap_{j=1}^n M_{\theta_j}(H^2(\mathbb{T})) \,.$$

Aufgabe 2. Zeigen Sie, daß für alle $a \in \mathbb{T}$ die Funktion
$$f_a : \mathbb{T} \to \mathbb{C}, \qquad z \mapsto \exp\Big(-\frac{a+z}{a-z}\Big)$$
eine innere Funktion ist.

Abgabetermin: Freitag, 12.12.2008, vor der Vorlesung.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter
`http://www.math.uni-sb.de/~ag/albrecht/ws08_09/spektral/spektral-ueb.html`