UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 - MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht

Übungen zur Vorlesung Lokale Methoden in der Spektraltheorie 1
(Wintersemester 2008/09)
Blatt 8/9

Aufgabe 1. Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, dessen Einheitskugel keine Extremalpunkte besitzt. Zeigen Sie, daß dann $(E, \|\cdot\|)$ nicht isometrisch isomorph zum Dualraum eines Banachraumes sein kann.

Hinweis: Erinnern Sie sich an die Sätze von Banach-Alaoglu und Krein-Milman aus der Funktionalanalysis.

Aufgabe 2. Zeigen Sie mit Hilfe der vorhergehenden Aufgabe:
Der Banachraum $(L^1(\mathbb{T}), \|\cdot\|_1)$ ist **nicht** isometrisch isomorph zum Dualraum eines Banachraums.

Aufgabe* 3. Sei $\mathcal{A}(\mathbb{T}) := \{f \in C(\mathbb{T})\,;\, \hat{f}_{-n} = 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$. Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{A}(\mathbb{T})$ ist eine abgeschlossene Unteralgebra von $C(\mathbb{T})$ und

$$\mathcal{A}(\mathbb{T}) = \{f \in C(\mathbb{T})\,;\, \exists g \in C(\overline{\mathbb{D}}) \cap \mathcal{O}(\mathbb{D}) : \quad f \equiv g|\mathbb{T}\}.$$

(b) Berechnen Sie $\Delta_{C(\mathbb{T})}(\mathcal{A}(\mathbb{T}))$.

Aufgabe 4. Sei $h \in H^1(\mathbb{T})$ keine m-Nullfunktion. Zeigen Sie:

$$m(\{z \in \mathbb{T}\,;\, h(z) = 0\}) = 0\,.$$

Aufgabe 5. Zeigen Sie, dass die (Einschränkungen auf $\mathbb{T}$ der) holomorphen Polynome dicht in $H^1(\mathbb{T})$ liegen.

Wir definieren $H^1_0(\mathbb{T}) := e_0 H^1(\mathbb{T}) = \{f \in H^1(\mathbb{T})\,;\, \hat{f}_{-n} = 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0\}$.

Aufgabe* 6. Zeigen Sie, daß die Abbildung $u \mapsto \psi_u$ mit

$$\psi_u(f + H^1_0(\mathbb{T})) := \int_{\mathbb{T}} f(z)u(z)\,dm(z) \qquad (f + H^1_0(\mathbb{T}) \in L^1(\mathbb{T})/H^1_0(\mathbb{T}))$$

einen isometrischen Isomorphismus von $H^\infty(\mathbb{T})$ auf den topologischen Dualraum von $L^1(\mathbb{T})/H^1_0(\mathbb{T})$ definiert.

Abgabetermin:

(a) Für die Aufgaben 1-3 am Montag, 05.01.2009, bis 10 Uhr in den Briefkasten der Arbeitsgruppe Albrecht im Gebäude E2 4.

(b) Für die Aufgaben 4-6 am Freitag, den 09.01.2009 vor der Vorlesung.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter
`http://www.math.uni-sb.de/~ag/albrecht/ws08_09/spektral/spektral-ueb.html`

Wir wünschen Ihnen ein frohes Weihnachtsfest und alles Gute für 2009!

*
***
*****
****
||