UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 - MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht

# Übungen zur Vorlesung Lokale Methoden in der Spektraltheorie 1 (Wintersemester 2008/09) Blatt 10

**Aufgabe 1.** Sei $(\mathfrak{R}, \|\cdot\|)$ eine $C^*$–Algebra mit Einselement 1 und sei $L : \mathfrak{R} \to \mathbb{C}$ ein stetiges lineares Funktional mit $L(1) = 1 = \|L\|$. Zeigen Sie, dass $L$ dann ein positives lineares Funktional ist, d.h., dass $L(a) \geq 0$ für alle positiven Elemente aus $\mathfrak{R}$ gilt.

Hinweis: Sei $0 \leq a \in \mathfrak{R}$ und sei $\mathfrak{R}_a$ die von 1 und $a$ erzeugte abgeschlossene Unteralgebra von $\mathfrak{R}$. Wenden Sie den Rieszschen Darstellungssatz auf die zu $\mathfrak{R}_a$ isometrisch isomorphe Banachalgebra $C(\sigma(a))$ an und zeigen Sie, dass es ein positives Maß $\mu \in \mathrm{rca}(\sigma(a))$ gibt mit $L(a) = \int_{\sigma(a)} z \, d\mu$.

**Aufgabe 2.** Sei $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ reellwertig. Zeigen Sie, dass es dann eine invertierbare Funktion $u \in H^\infty(\mathbb{T})$ gibt mit $|u| = e^f$ $m$-fast überall auf $\mathbb{T}$.

**Aufgabe$^*$ 3.** Sei $\phi \in \Delta(H^\infty(\mathbb{T}))$ und seien $L_1$ und $L_2$ zwei positive lineare Funktionale auf $L^\infty(\mathbb{T})$, die auf $H^\infty(\mathbb{T})$ mit $\phi$ übereinstimmen. Zeigen Sie, dass dann schon $L_1 = L_2$ gilt.

Hinweis: Ist $f$ eine beliebige reellwertige Funktion aus $L^\infty(\mathbb{T})$ und $u$ zu $f$ gemäß Aufgabe 2 gewählt, so zeige man zunächst

$$|\phi(u)| \leq L_1(e^f) \quad \text{und} \quad |\phi(1/u)| \leq L_2(e^{-f}).$$

Zeigen Sie nun, dass die Funktion $\psi : t \mapsto \psi(t) := L_1(e^{tf})L_2(e^{-tf})$ auf $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist und in $t = 0$ ihr Minimum annimmt. Berechnen Sie $\psi'(0)$.

**Abgabetermin: Freitag, den 16.01.2009 vor der Vorlesung.**

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter
`http://www.math.uni-sb.de/~ag/albrecht/ws08_09/spektral/spektral-ueb.html`