UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 - MATHEMATIK
Prof. Dr. Ernst Albrecht

Übungen zur Vorlesung Lokale Methoden in der Spektraltheorie 1 (Wintersemester 2008/09) Blatt 11

Aufgabe 1. Seien $u \in H^\infty(\mathbb{T})$ und $w \in \mathbb{D}$ mit $\mathcal{E}_z(u) = 0$. Zeigen Sie: Die Funktion v mit

$$v(\zeta) := \frac{\overline{\zeta} u(\zeta)}{1 - w\overline{\zeta}} \qquad (\zeta \in \mathbb{T})$$

liegt in $H^\infty(\mathbb{T})$ und erfüllt $(e_1 - w)v = u$.

Aufgabe 2. Sei K ein kompakter Hausdorffraum und sei $\mathfrak{A}$ eine abgeschlossene Unteralgebra von $C(K)$, die die Konstanten enthält. Sei weiter $\mathcal{S}$ eine multiplikative Halbgruppe von Funktionen aus $\mathfrak{A}$ mit $|u| \equiv 1$ für alle $u \in \mathcal{S}$ und mit $1 \in \mathcal{S}$. Zeigen Sie:

(a) Die Abschließung $\mathfrak{A}(\mathcal{S})$ von $\{f\overline{u}\,; u \in \mathcal{S}, f \in \mathfrak{A}\}$ ist eine Banachalgebra.
(b) Sind $\phi_1, \phi_2 \in \Delta(\mathfrak{A}(\mathcal{S}))$ mit $\phi_1(f) = \phi_2(f)$ für alle $f \in \mathfrak{A}$, so gilt schon $\phi_1 = \phi_2$.
(c) Durch $\phi \mapsto \rho(\phi) := \phi|_{\mathfrak{A}}$ wird eine stetige Einbettung von $\Delta(\mathfrak{A}(\mathcal{S}))$ in $\Delta(\mathfrak{A})$ gegeben.
(d) $\rho(\Delta(\mathfrak{A}(\mathcal{S}))) = \{\varphi \in \Delta(\mathfrak{A})\,; |\varphi(u)| = 1 \text{ für alle } u \in \mathcal{S}\}$.

Aufgabe* 3. Zeigen Sie:

(a) $\Delta(L^\infty(\mathbb{T}))$ ist kanonisch homöomorph zu
$$\Delta_{L^\infty} := \{\phi \in \Delta(H^\infty(\mathbb{T}))\,; |\phi(u)| = 1 \text{ für alle inneren Funktionen } u\}.$$
(b) $\Delta(H^\infty(\mathbb{T}) + C(\mathbb{T}))$ ist kanonisch homöomorph zu
$$\Delta_e := \{\phi \in \Delta(H^\infty(\mathbb{T}))\,; |\phi(e_1)| = 1\}.$$

Abgabetermin: Freitag, den 23.01.2009 vor der Vorlesung.

Die Übungsblätter finden Sie auch im Netz unter
`http://www.math.uni-sb.de/~ag/albrecht/ws08_09/spektral/spektral-ueb.html`