Lokale Methoden in der Spektraltheorie 1

Ernst Albrecht

Vorlesung im Wintersemester 2008/09
Universität des Saarlandes
Saarbrücken

Stand: 16. Januar 2009

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 1

Das lokale Prinzip von Graham Allan

In den Jahren 1965-1973 wurden von verschiedenen Autoren *lokale Prinzipien* entwickelt, die sich in den unterschiedlichsten Bereichen der Funktionalanalysis als außerordentlich nützlich erwiesen haben:

- Simonenko [**41, 42, 43**] sowie Gohberg und Krupnik [**25, 26, 27, 28**] (im Bereich der singulären Integraloperatoren),
- Douglas [**17, 18**] sowie Böttcher und Silbermann [**9, 10**] (im Bereich der Toeplitzoperatoren),
- Allan [**6**] (Algebren Banachalgebra–wertiger Funktionen),
- Dauns und Hoffmann [**14**] (im Bereich der C^*–Algebren,
- Silbermann und seine Schule [**29**] (Näherungsverfahren).

Ich möchte hier den recht allgemeinen und eleganten Zugang von Graham Allan vorstellen. Bei diesem lokalen Prinzip versucht man, eine gegebene, im Allgemeinen nicht kommutative Banachalgebra $\mathcal{B}$ als Algebra von Funktionen mit variablem Wertebereich über dem Raum der multiplikativen linearen Funktionale einer Unteralgebra des Zentrums von $\mathcal{B}$ darzustellen.

1.1. Hilfsmittel aus der Theorie der Banachalgebren

Im folgenden sei also stets $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ eine Banachalgebra über $\mathbb{C}$ mit Einselement 1. Die Menge

$$Z(\mathcal{B}) := \{x \in \mathcal{B}\,;\, ax = xa \quad \text{für alle } a \in \mathcal{B}\}$$

heißt das *Zentrum* von $\mathcal{B}$. Dies ist eine abgeschlossene, kommutative Unteralgebra von $\mathcal{B}$ mit $1 \in Z(\mathcal{B})$. Für die Elemente von $Z(\mathcal{B})$ gilt:

SATZ 1.1. *Sei $z \in Z(\mathcal{B})$ und sei $\mathcal{M}$ ein maximales Links–, Rechts– oder zweiseitiges Ideal in $\mathcal{B}$. Dann gibt es ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\lambda - z := \lambda \cdot 1 - z \in \mathcal{M}$.*

BEWEIS. Wir führen den Beweis nur für den Fall maximaler Linksideale. Die beiden anderen Fälle behandelt man analog. Sei $\pi : \mathcal{B} \to \mathcal{B}/\mathcal{M}$, $x \mapsto x + \mathcal{M}$ der kanonische Epimorphismus von $\mathcal{B}$ auf $\mathcal{B}/\mathcal{M}$.

(a) Für $w \in Z(\mathcal{B}) \setminus \mathcal{M}$ ist die Menge

$$K_w := \{x \in \mathcal{B}\,;\, xw \in \mathcal{M}\}$$

ein wegen $1 \notin \mathcal{M}$ echtes Linksideal in $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{M} \subseteq K_w$, da für alle $m \in \mathcal{M}$ gilt $mw = wm \in \mathcal{M}$ (wegen $w \in Z(\mathcal{B})$). Aus der Maximalität von $\mathcal{M}$ folgt $K_w = \mathcal{M}$. Wegen $w \notin \mathcal{M}$ und der Maximalität von $\mathcal{M}$ gilt

$$1 \in \mathcal{B} = \mathcal{B}w + \mathcal{M}\,.$$

Es gibt daher ein $u \in \mathcal{B}$ mit $uw - 1 \in \mathcal{M}$. Ist $v \in \mathcal{B}$ ein weiteres Element mit $vw - 1 \in \mathcal{M}$, so folgt $(u - v)w \in \mathcal{M}$ und somit $u - v \in K_w = \mathcal{M}$. Damit ist gezeigt: Es gibt genau ein Element $\eta \in \mathcal{B}/\mathcal{M}$ mit $vw - 1 \in \mathcal{M}$ für alle $v \in \eta$.

(b) Sei nun $z \in Z(\mathcal{B})$ beliebig. Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ ist dann auch $w(\lambda) := \lambda - z$ ein Element von $Z(\mathcal{B})$. Wir führen den Beweis des Satzes indirekt und machen die

Annahme: $w(\lambda) \notin \mathcal{M}$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$.

Wegen (a) gibt es zu jedem $\lambda \in \mathbb{C}$ genau ein $\eta(\lambda) \in \mathcal{B}/\mathcal{M}$ mit $u(\lambda)w(\lambda) - 1 \in \mathcal{M}$ für alle $u(\lambda) \in \eta(\lambda)$. Wir zeigen, daß die Funktion $\lambda \mapsto \eta(\lambda)$ eine ganze Funktion mit Werten in dem mit der Quotientennorm versehenen Banachraum $\mathcal{B}/\mathcal{M}$ ist. Sei hierzu $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ und $u_0 \in \eta(\lambda_0)$ beliebig. Insbesondere ist $m_0 := u_0 w(\lambda_0) - 1 \in \mathcal{M}$ und $u_0 \neq 0$. Für alle

$$\lambda \in U(\lambda_0) := \{\mu \in \mathbb{C}\,;\, |\mu - \lambda_0| < \|u_0\|^{-1}\}$$

ist dann $1 + (\lambda - \lambda_0)u_0$ in $\mathcal{B}$ invertierbar und

$$(1 + (\lambda - \lambda_0)u_0)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n u_0^n\,.$$

Es folgt für alle $\lambda \in U(\lambda)$:

$$\begin{aligned} u_0\,(1 + (\lambda - \lambda_0)u_0)^{-1}\,w(\lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n u_0^{n+1} (\lambda - \lambda_0 + w(\lambda_0)) \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n u_0^n + \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n u_0^n (1 + m_0) \\ &= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n u_0^n m_0\,. \end{aligned}$$

und hieraus wegen der Eindeutigkeitsaussage in (a): $\eta(\lambda) = \pi\left(u_0\,(1 + (\lambda - \lambda_0)u_0)^{-1}\right)$. Da $\lambda \mapsto (1 + (\lambda - \lambda_0)u_0)^{-1}$ auf $U(\lambda_0)$ holomorph ist, ist auch die $\mathcal{B}/\mathcal{M}$–wertige Funktion $\lambda \mapsto \eta(\lambda) = \pi\left(u_0\,(1 + (\lambda - \lambda_0)u_0)^{-1}\right)$ auf $U(\lambda_0)$ holomorph. Da dies für alle $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ gilt, ist η eine ganze $\mathcal{B}/\mathcal{M}$–wertige Funktion.

Für $|\lambda| > \|z\|$ existiert $w(\lambda)^{-1} = (\lambda - z)^{-1}$ in $\mathcal{B}$ und mit (a) folgt $\pi(w(\lambda)^{-1}) = \eta(\lambda)$ und somit $\|\eta(\lambda)\|_{\mathcal{B}/\mathcal{M}} \leq \|w(\lambda)^{-1}\| \to 0$ für $|\lambda| \to \infty$. Nach dem Satz von Liouville ist also $\eta(\lambda) = 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$. Insbesondere folgt für alle $u(\lambda) \in \eta(\lambda)$, daß $u(\lambda) \in \mathcal{M}$ gilt und somit wegen $u(\lambda)w(\lambda) - 1 \in \mathcal{M}$ auch $1 \in \mathcal{M}$ im Widerspruch dazu, daß $\mathcal{M}$ ein echtes Ideal in $\mathcal{B}$ ist. $\square$

FOLGERUNG 1.2. *Sei $\mathcal{Z}$ eine Unteralgebra des Zentrums $Z(\mathcal{B})$ von $\mathcal{B}$, welche das Einselement* 1 *von $\mathcal{B}$ enthält. Ist $\mathcal{M}$ ein maximales Links–, Rechts– oder zweiseitiges Ideal in $\mathcal{B}$, so ist $\mathcal{M} \cap \mathcal{Z}$ ein maximales Ideal in $\mathcal{Z}$.*

BEWEIS. Daß $\mathcal{M} \cap \mathcal{Z}$ ein echtes Ideal in $\mathcal{Z}$ ist, ist unmittelbar klar. Sei nun $z \in \mathcal{Z} \setminus \mathcal{M}$ beliebig. Nach Satz 1.1 gibt es ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $m := \lambda - z \in \mathcal{M}$. Wegen $z \notin \mathcal{M}$ ist $\lambda \neq 0$ und es folgt: $1 = \frac{1}{\lambda}(m + z)$ liegt in dem von $\mathcal{M} \cap \mathcal{Z}$ und z erzeugten Ideal von $\mathcal{Z}$. Es gibt daher kein echtes Ideal in $\mathcal{Z}$ welches $\mathcal{M} \cap \mathcal{Z}$ als echte Teilmenge enthält. Dies zeigt die Maximalität von $\mathcal{M} \cap \mathcal{Z}$. $\square$

Wir wollen nun von folgender Situation ausgehen:

$$\begin{array}{rl} (\mathcal{B}, \|\cdot\|) & \text{ist eine Banachalgebra mit Einselement 1} \\ (\mathcal{Z}, \|\cdot\|_{\mathcal{Z}}) & \text{ist eine in } Z(\mathcal{B}) \text{ enthaltene Unteralgebra mit } 1 \in \mathcal{Z}\,, \\ & \text{welche bezüglich der Norm } \|\cdot\|_{\mathcal{Z}} \text{ eine Banachalgebra ist.} \end{array} \tag{1.1}$$

Man beachte, daß die Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{Z}}$ in keiner Beziehung zu der von $\|\cdot\|$ induzierten Norm stehen muß. Den Raum $\Delta(\mathcal{Z})$ der (nicht-trivialen) multiplikativen, linearen Funktionale ist bekanntlich bezüglich der von der Topologie $\sigma(\mathcal{Z}', \mathcal{Z})$ induzierten Topologie ein kompakter Hausdorffraum.

DEFINITION 1.3. Ein multiplikatives, lineares Funktional $\varphi \in \Delta(\mathcal{Z})$ heiße $\mathcal{B}$*–erweiterbar*, falls das maximale Ideal $\ker \varphi$ von $\mathcal{Z}$ in einem echten Ideal von $\mathcal{B}$ enthalten ist. Die Menge aller $\mathcal{B}$–erweiterbaren multiplikativen Funktionale $\varphi \in \Delta(\mathcal{Z})$ bezeichnen wir mit $\Delta_{\mathcal{B}}(\mathcal{Z})$.

Ist $\varphi \in \Delta(\mathcal{Z})$, so ist wegen $\ker \varphi \subset \mathcal{Z} \subseteq Z(\mathcal{B})$ das von $\ker \varphi$ in $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ erzeugte (Links– oder Rechts–) Ideal

$$\mathcal{I}_0(\varphi) := \Big\{ \sum_{j=1}^{n} b_j z_j \, ; \, n \in \mathbb{N}, b_1, \dots, b_n \in \mathcal{B}, z_1, \dots, z_n \in \ker \varphi \Big\}$$

schon ein zweiseitiges Ideal. Die Abschließung $\mathcal{I}(\varphi)$ von $\mathcal{I}_0(\varphi)$ ist dann das kleinste, bezüglich $\|\cdot\|$ abgeschlossene (Rechts– bzw. Links– bzw. zweiseitige) Ideal in $\mathcal{B}$, welches $\ker \varphi$ enthält. Mit Aufgabe 1.1 sieht man:

LEMMA 1.4. *$\varphi \in \Delta(\mathcal{Z})$ ist genau dann $\mathcal{B}$–erweiterbar, wenn $\mathcal{I}(\varphi) \neq \mathcal{B}$ gilt.*

LEMMA 1.5. *Die Menge $\Delta_{\mathcal{B}}(\mathcal{Z})$ aller $\mathcal{B}$–erweiterbaren multiplikativen Funktionale $\varphi \in \Delta(\mathcal{Z})$ ist abgeschlossen in $\Delta(\mathcal{Z})$.*

BEWEIS. Wir zeigen, daß $\Delta(\mathcal{Z}) \setminus \Delta_{\mathcal{B}}(\mathcal{Z})$ offen in $\Delta(\mathcal{Z})$ ist. Sei also $\varphi_0 \in \Delta(\mathcal{Z}) \setminus \Delta_{\mathcal{B}}(\mathcal{Z})$ beliebig. Dann enthält das von $\ker \varphi_0$ in $\mathcal{B}$ algebraisch erzeugte Ideal $\mathcal{I}_0(\varphi_0)$ das Einselement 1. Es gibt also endlich viele $b_1, \dots, b_n \in \mathcal{B}$, $z_1, \dots, z_n \in \ker \varphi_0$ mit

$$\sum_{j=1}^{n} b_j z_j = 1.$$

Die Menge

$$U_0 := \Big\{ \varphi \in \Delta(\mathcal{Z}) \, ; \, |\varphi(z_j)| = |\varphi(z_j) - \varphi_0(z_j)| < \Big(\sum_{k=1}^{n} \|b_k\| \Big)^{-1} \quad \text{für } j = 1, \dots, n \Big\}$$

ist dann eine in $\Delta(\mathcal{Z})$ offene Umgebung von φ_0. Sei $\varphi \in U_0$ beliebig. Dann liegt $z_j - \varphi(z_j)1$ im Kern von φ für $j = 1, \dots, n$ und es folgt

$$x := 1 - \sum_{j=1}^{n} \varphi(z_j) b_j = \sum_{j=1}^{n} b_j (z_j - \varphi(z_j)) \in \mathcal{I}_0(\varphi)\,.$$

Wegen

$$\|x - 1\| = \Big\| \sum_{j=1}^{n} \varphi(z_j) b_j \Big\| \leq \sum_{j=1}^{n} \|b_j\| \cdot |\varphi(z_j)| < 1$$

ist x in $\mathcal{B}$ invertierbar und somit $1 = x^{-1} x \in \mathcal{I}_0(\varphi)$. φ ist also für kein $\varphi \in U_0$ $\mathcal{B}$-erweiterbar und es folgt $U_0 \subseteq \Delta(\mathcal{Z}) \setminus \Delta_{\mathcal{B}}(\mathcal{Z})$. Damit ist gezeigt, daß $\Delta(\mathcal{Z}) \setminus \Delta_{\mathcal{B}}(\mathcal{Z})$ offen ist. $\square$

Mit Lemma 1.5 und Folgerung 1.2 erhalten wir:

FOLGERUNG 1.6. *Versehen mit der von $\Delta(\mathcal{Z})$ induzierten Relativtopologie ist $\Delta_{\mathcal{B}}(\mathcal{Z})$ ein kompakter, nicht leerer Hausdorffraum.*

1.2. Lokalisierungen über Unteralgebren des Zentrums

In der Situation (1.1) nennen wir für $\varphi \in \Delta_{\mathcal{B}}(\mathcal{Z})$ die durch

$$\mathcal{B}_\varphi := \mathcal{B}/\mathcal{I}(\varphi)$$

gegebene Quotientenalgebra die *zu φ gehörige lokale Banachalgebra.* Versehen mit der Quotientennorm $\|\cdot\|_\varphi$ ist $\mathcal{B}_\varphi$ eine Banachalgebra mit Einselement $1_\varphi := 1 + \mathcal{I}(\varphi)$. Den kanonischen Epimorphismus von $\mathcal{B}$ auf $\mathcal{B}_\varphi = \mathcal{B}/\mathcal{I}(\varphi)$ bezeichnen wir mit π_φ. Für alle $x \in \mathcal{B}$ und alle $\varphi \in \Delta_{\mathcal{B}}(\mathcal{Z})$ definieren wir

$$\hat{x}(\varphi) := \pi_\varphi(x)\,.$$

In diesem Sinn operieren die Elemente von $\mathcal{B}$ als Funktionen auf $\Delta_{\mathcal{B}}(\mathcal{Z})$ mit *variablem Bildbereich.* Für $x \in \mathcal{B}$ schreiben wir

$$\hat{x} := (\hat{x}(\varphi))_{\varphi\in\Delta_{\mathcal{B}}(\mathcal{Z})}$$

und definieren

$$\Gamma_{\mathcal{Z}}(\mathcal{B}) := \left\{(\hat{x}(\varphi))_{\varphi\in\Delta_{\mathcal{B}}(\mathcal{Z})}\,;\, x \in \mathcal{B}\right\} \subseteq \prod_{\varphi\in\Delta_{\mathcal{B}}(\mathcal{Z})} \mathcal{B}_\varphi.$$

Im Fall $\mathcal{B} = \mathcal{Z}$ ist dies gerade die Menge der Gelfandtransformierten von $\mathcal{Z}$ und damit eine Unteralgebra von $C(\Delta_{\mathcal{Z}}(\mathcal{Z})) = C(\Delta(\mathcal{Z}))$. Versehen mit der durch

$$\|\hat{x}\|_\Gamma := \sup_{\varphi\in\Delta_{\mathcal{B}}(\mathcal{Z})} \|\hat{x}(\varphi)\|_\varphi \qquad (x \in \mathcal{B})$$

gegebenen Norm wird $\Gamma_{\mathcal{Z}}(\mathcal{B})$ zu einer normierten Algebra mit Einselement $\hat{1}$.

Satz 1.7. *In der Situation* (1.1) *gilt:*

(a) *$\Gamma_{\mathcal{Z}} : \mathcal{B} \to \Gamma_{\mathcal{Z}}(\mathcal{B})$, $x \mapsto \Gamma_{\mathcal{Z}}(x) := \hat{x}$ ist ein stetiger unitaler Homomorphismus von $\mathcal{B}$ auf $\Gamma_{\mathcal{Z}}(\mathcal{B})$ mit $\|\Gamma_{\mathcal{Z}}\| = 1$.*

(b) *Für alle $x \in \mathcal{B}$ ist die Funktion*

$$N_x : \Delta_{\mathcal{B}}(\mathcal{Z}) \to \mathbb{R}\,, \qquad \varphi \mapsto N_x(\varphi) := \|\hat{x}(\varphi)\|_\varphi\,,$$

oberhalb halbstetig auf $\Delta_{\mathcal{B}}(\mathcal{Z})$.

(c) *Ist $\mathcal{J}$ ein echtes (Links–, Rechts– oder zweiseitiges) Ideal in $\mathcal{B}$, so gibt es ein $\varphi \in \Delta_{\mathcal{B}}(\mathcal{Z})$, so daß $\pi_\varphi(\mathcal{J}) = \{\hat{x}(\varphi)\,;\, x \in \mathcal{J}\}$ ein echtes (Links– bzw. Rechts– bzw. zweiseitiges) Ideal in $\Gamma_{\mathcal{Z}}(\mathcal{B})$ ist.*

Beweis. (a) rechnet man unmittelbar nach. Die Stetigkeit ergibt sich wegen $\|\hat{x}\|_\Gamma = \sup_{\varphi\in\Delta_{\mathcal{B}}(\mathcal{Z})} \|\pi_\varphi(x)\|_\varphi \le \|x\|$ für alle $x \in \mathcal{B}$. Wegen $\|\hat{1}\|_\Gamma = 1 = \|1\|$ folgt $\|\Gamma_{\mathcal{Z}}\| = 1$.

(b) Sei $x \in \mathcal{B}$ beliebig. Wir müssen zeigen, daß es zu jedem $\varphi_0 \in \Delta_{\mathcal{B}}(\mathcal{Z})$ und jedem $\varepsilon > 0$ eine Umgebung U von φ_0 in $\Delta_{\mathcal{B}}(\mathcal{Z})$ gibt mit

$$\forall \varphi \in U : \qquad N_x(\varphi) < N_x(\varphi_0) + \varepsilon.$$

Seien also $\varphi_0 \in \Delta_{\mathcal{B}}(\mathcal{Z})$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Aus der Definition von $\mathcal{I}(\varphi)$ und der Quotientennorm folgt für alle $\varphi \in \Delta_{\mathcal{B}}(\mathcal{Z})$:

$$N_x(\varphi) = \inf\left\{\left\|x + \sum_{j=1}^n b_j z_j\right\|\,;\, n \in \mathbb{N}, b_1,\dots,b_n \in \mathcal{B}, z_1,\dots,z_n \in \ker\varphi\right\}. \qquad (1.2)$$

Daher gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, $b_1,\dots,b_n \in \mathcal{B}$ und $z_1,\dots,z_n \in \ker\varphi_0$ mit

$$N_x(\varphi_0) \le \left\|x + \sum_{j=1}^n b_j z_j\right\| < N_x(\varphi_0) + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Die durch

$$U := \left\{\varphi \in \Delta_{\mathcal{B}}(\mathcal{Z})\,;\, |\varphi(z_j)| < \frac{\varepsilon}{2\sum_{j=1}^n \|b_j\| + 1} \text{ für } j = 1, \dots, n\right\}$$

definierte Menge U ist eine offene Umgebung von φ_0 in $\Delta_{\mathcal{B}}(\mathcal{Z})$. Für alle $\varphi \in U$ erhalten wir wegen (1.2) und $z_j - \varphi(z_j)1 \in \ker \varphi$:

$$\begin{aligned} N_x(\varphi) - N_x(\varphi_0) &\le \left\|x + \sum_{j=1}^n b_j(z_j - \varphi(z_j))\right\| - \left\|x + \sum_{j=1}^n b_j z_j\right\| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\le \left\|x + \sum_{j=1}^n b_j z_j\right\| + \sum_{j=1}^n \|b_j\| \cdot |\varphi(z_j)| - \left\|x + \sum_{j=1}^n b_j z_j\right\| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Damit ist (b) bewiesen.

(c) Wir führen den Beweis nur für Linksideale. Der Beweis für Rechtsideale und für zweiseitige Ideale verläuft analog.

Ist $\mathcal{J}$ ein echtes Linksideal in $\mathcal{B}$, so gibt es ein maximales Linksideal $\mathcal{L}$ in $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{L}$. Dann ist $\mathcal{L} \cap \mathcal{Z}$ nach Folgerung 1.2 ein maximales Ideal in $\mathcal{Z}$. Es gibt also ein $\varphi \in \Delta(\mathcal{Z})$ mit $\ker \varphi = \mathcal{L} \cap \mathcal{Z} \subseteq \mathcal{L}$. Insbesondere ist $\varphi \in \Delta_{\mathcal{B}}(\mathcal{Z})$. Wäre $\pi_\varphi(\mathcal{L})$ kein echtes Linksideal in $\mathcal{B}_\varphi$, so gäbe es ein $y \in \mathcal{L}$ mit $\pi_\varphi(y) = 1_\varphi$, d.h. mit $1 - y \in \mathcal{I}(\varphi) \subseteq \mathcal{L}$. Hieraus folgt aber $1 \in \mathcal{L}$ im Widerspruch dazu, daß $\mathcal{L}$ ein echtes Ideal ist. Daher muß $\pi_\varphi(\mathcal{L})$ und somit auch $\pi_\varphi(\mathcal{J})$ ein echtes Ideal in $\mathcal{B}_\varphi$ sein. □

FOLGERUNG 1.8. *In der Situation von* (1.1) *sei* $\mathcal{J}$ *ein maximales Links– bzw. Rechts– bzw. zweiseitiges Ideal in* $\mathcal{B}$. *Dann gibt es ein* $\varphi \in \Delta_{\mathcal{B}}(\mathcal{Z})$ *und ein maximales Links– bzw. Rechts– bzw. zweiseitiges Ideal* $\mathcal{J}_\varphi$ *in* $\mathcal{B}_\varphi$ *mit*

$$\mathcal{J} = \pi_\varphi^{-1}(\mathcal{J}_\varphi) = \{x \in \mathcal{B}\,;\, \hat{x}(\varphi) \in \mathcal{J}_\varphi\}.$$

BEWEIS (NUR FÜR LINKSIDEALE). Sei $\mathcal{J}$ also ein maximales Linksideal in $\mathcal{B}$. Nach Satz 1.7 gibt es ein $\varphi \in \Delta_{\mathcal{B}}(\mathcal{Z})$, so daß $\pi_\varphi(\mathcal{J})$ ein echtes Linksideal in $\mathcal{B}_\varphi$ ist, und somit in einem maximalen Linksideal $\mathcal{J}_\varphi$ von $\mathcal{B}_\varphi$ enthalten ist. Dann ist $\pi_\varphi^{-1}(\mathcal{J}_\varphi)$ ein das maximale Linksideal $\mathcal{J}$ enthaltendes Linksideal in $\mathcal{B}$. Wegen $1 \notin \pi_\varphi^{-1}(\mathcal{J}_\varphi)$ und der Maximalität von $\mathcal{J}$ muß $\mathcal{J} = \pi_\varphi^{-1}(\mathcal{J}_\varphi)$ gelten.

Den Beweis für maximale Rechtsideale bzw. maximale zweiseitige Ideale führt man analog. □

FOLGERUNG 1.9. *In der Situation* (1.1) *ist ein Element* $x \in \mathcal{B}$ *genau dann linksinvertierbar (bzw. rechtsinvertierbar bzw. invertierbar), wenn für alle* $\varphi \in \Delta_{\mathcal{B}}(\mathcal{Z})$ *das Element* $\pi_\varphi(x) = \hat{x}(\varphi)$ *in* $\mathcal{B}_\varphi$ *linksinvertierbar (bzw. rechtsinvertierbar bzw. invertierbar) ist.*

BEWEIS. Sei $\varphi \in \Delta_{\mathcal{B}}(\mathcal{Z})$ beliebig. Da $\pi_\varphi : \mathcal{B} \to \mathcal{B}_\varphi$ ein unitaler Algebrenhomomorphismus ist, folgt aus der Linksinvertierbarkeit (bzw. Rechtsinvertierbarkeit bzw. Invertierbarkeit) von $x \in \mathcal{B}$ auch die entsprechende Invertierbarkeit von $\pi_\varphi(x)$ in $\mathcal{B}_\varphi$.

Ist $x \in \mathcal{B}$ nicht linksinvertierbar (bzw. rechtsinvertierbar), so folgt $x \in \mathcal{J}$ für ein maximales Links– bzw. Rechtsideal $\mathcal{J}$ in $\mathcal{B}$. Zu $\mathcal{J}$ gibt es nach Folgerung 1.8 ein $\varphi \in \Delta_{\mathcal{B}}(\mathcal{Z})$ und ein maximales Links– bzw. Rechtsideal $\mathcal{J}_\varphi$ in $\mathcal{B}_\varphi$ mit $\mathcal{J} = \pi_\varphi^{-1}(\mathcal{J}_\varphi)$. Insbesondere folgt $\pi_\varphi(x) \in \mathcal{J}_\varphi$. Das Element $\pi_\varphi(x)$ ist also in $\mathcal{B}_\varphi$ nicht links– bzw. rechtsinvertierbar. □

Das *Radikal* $\operatorname{rad} \mathcal{A}$ einer Algebra $\mathcal{A}$ mit Einselement 1 ist nach Definition gleich dem Durchschnitt über alle maximalen Linksideale und stimmt mit dem Durchschnitt über alle maximalen Rechtsideale überein. Es ist auch beschrieben durch

$$\begin{aligned}\operatorname{rad}\mathcal{A} &= \{x \in \mathcal{A}; (1-yx)^{-1} \text{ existiert in } \mathcal{A} \text{ für alle } y \in \mathcal{A}\}\\ &= \{x \in \mathcal{A}; (1-xy)^{-1} \text{ existiert in } \mathcal{A} \text{ für alle } y \in \mathcal{A}\}\end{aligned}$$

(verg. z.B. [**3**], Satz 0.10). Mit dieser Darstellung des Radikals von $\mathcal{B}$ bzw. von $\mathcal{B}_\varphi$ erhalten wir aus Folgerung 1.9 unter Berücksichtigung der Surjektivität von π_φ für alle $\varphi \in \Delta_{\mathcal{B}}(\mathcal{Z})$:

Folgerung 1.10. *In der Situation* (1.1) *gilt:*

$$\operatorname{rad}\mathcal{B} = \bigcap_{\varphi\in\Delta_{\mathcal{B}}(\mathcal{Z})} \pi_\varphi^{-1}(\operatorname{rad}\mathcal{B}_\varphi).$$

Eine unitale Algebra $\mathcal{A}$ mit Einselement 1 heißt bekanntlich *halbeinfach*, falls $\operatorname{rad}\mathcal{A} = \{0\}$ gilt.

Folgerung 1.11. *Ist in der Situation* (1.1) *die Banachalgebra $\mathcal{B}$ halbeinfach, so ist die Abbildung $\Gamma_{\mathcal{Z}} : \mathcal{B} \to \Gamma_{\mathcal{Z}}(\mathcal{B})$ injektiv.*

Beweis. Ist $\mathcal{B}$ halbeinfach, so gilt

$$\ker\Gamma_{\mathcal{Z}} = \bigcap_{\varphi\in\Delta_{\mathcal{B}}(\mathcal{Z})} \pi_\varphi^{-1}(\{0\}) \subseteq \bigcap_{\varphi\in\Delta_{\mathcal{B}}(\mathcal{Z})} \pi_\varphi^{-1}(\operatorname{rad}\mathcal{B}_\varphi) = \operatorname{rad}\mathcal{B} = \{0\}.$$

□

Als erstes Anwendungsbeispiel wollen wir die von Graham Allan in [**6**] eingeführten Banachalgebren vektorwertiger Funktionen betrachten.

Definition 1.12. Sei K ein kompakter Hausdorffraum. Für jedes $t \in K$ sei $(\mathcal{B}(t), \|\cdot\|_t)$ eine komplexe Banachalgebra mit Einselement 1_t. Sei weiter $\mathcal{C}$ eine die konstante Funktionen enthaltende, abgeschlossene Unteralgebra der Algebra $(C(K), \|\cdot\|_K)$ aller stetigen komplexwertigen Funktionen auf K mit $\Delta(\mathcal{C}) = K$ (wobei wir für $t \in K$ den Punkt t mit dem Diracfunktional δ_t zu t identifizieren). Insbesondere trennt $\mathcal{C}$ die Punkte von K. Sei $\mathcal{P} := \prod_{t\in K} \mathcal{B}(t)$ die Produktalgebra. Eine Unteralgebra $\mathcal{B}$ von $\mathcal{P}$ heiße *Banachalgebra vektorwertiger Funktionen auf K über $\mathcal{C}$*, falls die folgenden vier Bedingungen erfüllt sind:

(a) Für alle $t \in K$ ist die Projektion $x \mapsto x(t)$ auf die t–Komponente von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}(t)$ surjektiv.

(b) Für alle $x \in \mathcal{B}$ gilt
$$\sup_{t\in K} \|x(t)\|_t < \infty,$$
d.h. die durch
$$N_x : K \to \mathbb{R}, \qquad t \mapsto N_x(t) := \|x(t)\|_t\,,$$
definierte Funktion ist auf K beschränkt.

(c) $\mathcal{B}$ ist vollständig bezüglich der durch
$$\|x\| := \sup_{t\in K} N_x(t) \qquad (x \in \mathcal{B})$$
definierten Norm auf $\mathcal{B}$ und damit eine Banachalgebra.

(d) Für alle $f \in \mathcal{C}$ gilt
$$\tilde{f} := (f(t)1_t)_{t\in K} \in \mathcal{B}.$$

Ist zusätzlich für alle $x \in \mathcal{B}$ die Funktion N_x stetig (bzw. nach oben halbstetig), so heißt $\mathcal{B}$ eine *stetige* (bzw. *oberhalb stetige*) *Banachalgebra vektorwertiger Funktionen auf K über $\mathcal{C}$*.

Ist $\mathcal{B}$ eine Banachalgebra vektorwertiger Funktionen auf einem kompakten Hausdorffraum K über einer abgeschlossenen Unteralgebra $\mathcal{C}$ von $C(K)$, so ist die Abbildung $f \mapsto \tilde{f}$ ein isometrischer Algebrenmonomorphismus von $\mathcal{C}$ auf eine abgeschlossene Unteralgebra des Zentrums $Z(\mathcal{B})$ von $\mathcal{B}$. Wir schreiben dann $\tilde{\mathcal{C}} := \{\tilde{f}\,;\, f \in \mathcal{C}\}$. Mit $\mathcal{Z} := \tilde{\mathcal{C}}$ liegt also eine Situation wie in (1.1) vor. Wegen $\Delta(\mathcal{C}) = K$ können wir auch $\Delta(\tilde{C})$ in kanonischer Weise mit K identifizieren (vermöge $t \mapsto \tilde{\delta}_t$, wobei $\tilde{\delta}_t(\tilde{f}) := f(t)$ für alle $t \in K$, $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{C}}$). Mit dieser Identifikation gilt:

Satz 1.13 (Allan [**6**]). *Sei $\mathcal{B}$ eine Banachalgebra vektorwertiger Funktionen auf einem kompakten Hausdorffraum K über $\mathcal{C} \subseteq C(K)$. Dann gilt:*

(a) $\Delta_{\mathcal{B}}(\tilde{\mathcal{C}}) = \Delta(\tilde{\mathcal{C}}) = K$.

(b) *Der Homomorphismus $\Gamma_{\tilde{\mathcal{C}}} : \mathcal{B} \to \Gamma_{\tilde{\mathcal{C}}}(\mathcal{B})$, $x \mapsto \Gamma_{\tilde{\mathcal{C}}}(x) = \hat{x}$, ist eine Isometrie.*

Beweis. Für alle $t \in K$ gilt

$$\ker \tilde{\delta}_t = \{\tilde{f}\,;\, f \in \mathcal{C}, f(t) = 0\} \subseteq \mathcal{J}_t := \{x \in \mathcal{B}\,;\, x(t) = 0\}$$

und $\mathcal{J}_t$ ist ein echtes Ideal in $\mathcal{B}$. Also sind alle $\tilde{\delta}_t \in \Delta(\tilde{\mathcal{C}})$ $\mathcal{B}$–erweiterbar. Insbesondere folgt (a) und das von $\ker \tilde{\delta}_t$ erzeugte abgeschlossene zweiseitige Ideal $\mathcal{I}(t)$ ist in $\mathcal{J}_t$ enthalten. Wir definieren $\rho : \Gamma_{\tilde{\mathcal{C}}}(\mathcal{B}) \to \mathcal{B}$ durch

$$\rho(\hat{x}) := x \qquad \text{für alle } x \in \mathcal{B}\,.$$

Wir zeigen zunächst, daß ρ wohldefiniert ist: Sind $x, y \in \mathcal{B}$ mit $\hat{x} = \hat{y}$, so folgt für alle $t \in K$: $x + \mathcal{I}(t) = \hat{x}(\tilde{\delta}_t) = \hat{y}(\tilde{\delta}_t) = y + \mathcal{I}(t)$ und damit

$$x - y \in \mathcal{I}(t) \subseteq \mathcal{J}_t = \{u \in \mathcal{B}\,;\, u(t) = 0\}\,.$$

Also gilt $x(t) = y(t)$ für alle $t \in K$ und somit $x = y$. Man rechnet unmittelbar nach, daß ρ ein unitaler Algebrenhomomorphismus ist. Für alle $t \in K$, $x \in \mathcal{B}$ gilt ferner

$$\begin{aligned}\|\hat{x}(\tilde{\delta}_t)\|_{\mathcal{B}/\mathcal{I}(t)} &= \inf_{u \in \mathcal{I}(t)} \|x + u\| \geq \inf_{u \in \mathcal{J}_t} \|x + u\| = \inf_{u \in \mathcal{J}_t} \sup_{s \in K} \|x(s) + u(s)\|_s \\ &\geq \|x(t) + u(t)\|_t = \|x(t)\|_t\,.\end{aligned}$$

Damit folgt für alle $x \in \mathcal{B}$:

$$\|\rho(\hat{x})\| = \|x\| = \sup_{t \in K} \|x(t)\|_t \leq \sup_{t \in K} \|\hat{x}(\tilde{\delta}_t)\|_{\mathcal{B}/\mathcal{I}(t)} = \|\hat{x}\|_\Gamma$$

und somit $\|\rho\| \leq 1$. Wegen $\|\Gamma\| = 1$ und $\Gamma \circ \rho = \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$ ist dies nur möglich, wenn sowohl Γ wie auch ρ Isometrien sind. □

Ist $\mathcal{B}$ eine Banachalgebra von Funktionen auf dem kompakten Hausdorffraum K über einer abgeschlossenen Unteralgebra $\mathcal{C}$ von $C(K)$ und ist $\mathcal{J}$ ein (Links– Rechts– oder zweiseitiges) Ideal in $\mathcal{B}$, so setzen wir $\mathcal{J}(t) := \{x(t)\,;\, x \in \mathcal{J}\}$. Das Ideal $\mathcal{J}$ heißt *fixiert*, falls $\mathcal{J}(t)$ für wenigstens ein $t \in K$ ein echtes Ideal in $\mathcal{B}(t)$ ist. Gilt $\mathcal{J}(t) = \mathcal{B}(t)$ für alle $t \in K$ so heißt $\mathcal{J}$ *frei*. Wir sagen $\mathcal{B}$ besitzt die *Fixidealeigenschaft*, falls alle Ideale in $\mathcal{B}$ fixiert sind.

Mit den Bezeichnungen aus Definition 1.12 und Satz 1.13 erhalten wir aus den Sätzen 1.13 und 1.7:

Folgerung 1.14. *Seien K, $\mathcal{C}$ und $\mathcal{B}$ wie in Definition 1.12. Dann ist $\mathcal{B}$ isometrisch isomorph zu einer oberhalb halbstetigen Banachalgebra (nämlich zu $\Gamma_{\tilde{\mathcal{C}}}(\mathcal{B})$) von vektorwertigen Funktionen auf K über $\mathcal{C}$, welche die Fixidealeigenschaft besitzt.*

Übungsaufgaben zu Kapitel 1

Aufgabe 1.1. Sei $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ eine Banachalgebra mit Einselement 1. Zeigen Sie: Ist $\mathcal{I}$ ein echtes Links–, Rechts– oder zweiseitiges Ideal in $\mathcal{B}$, so ist auch die Abschließung $\overline{\mathcal{I}}$ ein echtes Links– bzw. Rechts– bzw. zweiseitiges Ideal in $\mathcal{B}$.

KAPITEL 2

Das lokale Prinzip für C^*–Algebren

Besonders schön ist die Situation für C^*–Algebren. Zur Herleitung benötigen wir zunächst einige Hilfsmittel aus der Theorie dieser Algebren. Zur Theorie der C^*–Algebren sei insbesondere auf die Monographien [**16, 15, 37, 40**] verwiesen.

2.1. Hilfsmittel aus der Theorie der C^*–Algebren

Zur Erinnerung:

Definition 2.1. Eine komplexe Banachalgebra $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ heißt *C^*–Algebra*, falls eine Abbildung $^* : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$, $x \mapsto x^*$, existiert mit den folgenden Eigenschaften:

(a) * ist eine *Involution*, d.h. es ist $(x^*)^* = x$ für alle $x \in \mathcal{B}$.
(b) * ist konjugiert–linear, d.h. für alle $x, y \in \mathcal{B}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt $(\alpha x + \beta y)^* = \overline{\alpha} x^* + \overline{\beta} y^*$.
(c) Für alle $x, y \in \mathcal{B}$ gilt $(xy)^* = y^* x^*$.
(d) Für alle $x \in \mathcal{B}$ gilt $\|x\|^2 = \|x^* x\|$.

Die in der Funktionalanalysisvorlesung [**3**], Kapitel 15, bereits behandelten elementaren Eigenschaften der C^*–Algebren werden in diesem Abschnitt als bekannt vorausgesetzt.

Bekanntlich ist jede Banachalgebra isometrisch isomorph zu einer abgeschlossenen Unteralgebra einer Banachalgebra mit einem Einselement. Eine entsprechende Aussage gilt auch in der Kategorie der C^*–Algebren:

Satz 2.2. *Jede C^*–Algebra $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ ist isometrisch $*$–isomorph zu einer abgeschlossenen C^*–Unteralgebra einer C^*–Algebra $\mathcal{B}^\sharp$ mit Einselement* 1.

Beweis. Für alle $a \in \mathcal{B}$ definieren wir $L(a) \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ durch $L(a)x := ax$ für alle $x \in \mathcal{B}$. Die hierdurch definierte Abbildung $L : \mathcal{B} \to \mathcal{L}(\mathcal{B})$ (*linksreguläre Darstellung* von $\mathcal{B}$ genannt) ist offensichtlich ein Algebrenhomomorphismus. Wir definieren

$$\mathcal{B}^\sharp := \{L(a) + \alpha 1\,;\, a \in \mathcal{B},\, \alpha \in \mathbb{C}\}$$

und versehen $\mathcal{B}^\sharp$ mit der auf $\mathcal{B}^\sharp$ eingeschränkten Operatornorm von $\mathcal{L}(\mathcal{B})$. Besitzt $\mathcal{B}$ ein Einselement $1_\mathcal{B}$ so ist $L(1_\mathcal{B}) = 1$ und $\mathcal{B}^\sharp = L(\mathcal{B})$. Andernfalls ist $L(\mathcal{B})$ ein maximales zweiseitiges Ideal in $\mathcal{B}^\sharp$ der Kodimension 1. Wir definieren eine Involution $*$ auf $\mathcal{B}^\sharp$ durch $(L(a) + \alpha 1)^* := L(a^*) + \overline{\alpha} 1$ für alle $a \in \mathcal{B}$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Dann ist $L : \mathcal{B} \to \mathcal{B}^\sharp$ ein $*$-Homomorphismus.

Für alle $a, x \in \mathcal{B}$ gilt $\|L(a)x\| = \|ax\| \le \|a\| \cdot \|x\|$. $L(a)$ ist also stetig mit $\|L(a)\| \le \|a\|$. Wegen $\|x\|^2 = \|xx^*\| = \|L(x)x^*\| \le \|L(x)\| \cdot \|x\|$ ist L sogar eine Isometrie. Analog sieht man, daß auch die *rechtsreguläre Darstellung* $R : \mathcal{B} \to \mathcal{L}(\mathcal{B})$ mit $R(a)x := xa$ für alle $a, x \in \mathcal{B}$ ein isometrischer Algebrenhomomorphismus ist. Insbesondere ist $L(\mathcal{B})$ und damit (wegen $\mathcal{B}^\sharp = L(\mathcal{B}) + \mathbb{C}1$) auch $\mathcal{B}^\sharp$ abgeschlossen in $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ also auch vollständig (vergl. etwa Lemma 10.4 in [**3**]).

Sei $L(a) + \alpha 1 \in \mathcal{B}^\sharp$ beliebig (mit $a \in \mathcal{B}$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Für alle $x \in \mathcal{B}$ mit $\|x\| \le 1$ folgt

$$\begin{aligned}\|(L(a)+\alpha 1)^* x\| &= \|R((L(a)+\alpha 1)^* x)\| = \sup_{\|y\|\le 1} \|y(a^* + \overline{\alpha})x\| = \sup_{\|y\|\le 1} \|(y(a^*+\overline{\alpha})x)^*\| \\ &= \sup_{\|y\|\le 1} \|x^*(a+\alpha)y^*\| \le \sup_{\|y\|\le 1} \|(a+\alpha)y^*\| \le \sup_{\|y\|\le 1} \|(L(a)+\alpha 1)y^*\| \\ &\le \|L(a)+\alpha 1\| \,.\end{aligned}$$

Durch Übergang zum Supremum bezüglich x sieht man $\|(L(a) + \alpha 1)^*\| \le \|L(a) + \alpha 1\|$. Analog zeigt man $\|L(a)+\alpha 1\| \le \|(L(a)+\alpha 1)^*\|$. Die Involution $*$ ist also eine konjugiert lineare Isometrie von $\mathcal{B}^\sharp$ auf sich.

Daß $\mathcal{B}^\sharp$ die Bedingungen (a)–(c) in Definition 2.1 erfüllt, rechnet man unmittelbar nach. Um zu zeigen, daß $\mathcal{B}^\sharp$ eine C^*–Algebra ist, müssen wir noch (d) verifizieren. Seien also $a \in \mathcal{B}$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ beliebig. Dann gibt es zu beliebigem $\varepsilon > 0$ nach Definition der Operatornorm ein $x \in \mathcal{B}$ mit $\|x\| \le 1$ und

$$\|L(a) + \alpha 1\|^2 < \varepsilon + \|(a+\alpha)x\|^2.$$

Da $\mathcal{B}$ eine C^*–Algebra ist folgt

$$\begin{aligned}\|L(a)+\alpha 1\|^2 &< \varepsilon + \|(L(a)+\alpha)x\|^2 = \varepsilon + \|x^*(a^*+\overline{\alpha})(a+\alpha)x\| \\ &\le \varepsilon + \|(a^*+\overline{\alpha})^*(a+\alpha)x\| = \varepsilon + \|(L(a)+\alpha))^*(L(a)+\alpha)x\| \\ &\le \varepsilon + \|(L(a)+\alpha))^*(L(a)+\alpha)\|\end{aligned}$$

Damit erhalten wir für $\varepsilon \to 0$

$$\|L(a)+\alpha 1\|^2 \le \|(L(a)+\alpha))^*(L(a)+\alpha)\| \le \|(L(a)+\alpha))^*\| \cdot \|L(a)+\alpha\| = \|L(a)+\alpha 1\|^2.$$

Dies zeigt, daß auch die Bedingung (d) in Definition 2.1 für $\mathcal{B}^\sharp$ erfüllt ist. □

Wir werden in Zukunft $\mathcal{B}$ mit seinem isometrisch $*$–isomorphen Bild $L(\mathcal{B})$ als Unteralgebra von $\mathcal{B}^\sharp$ identifizieren. Ein Element $a \in \mathcal{B}$ heißt *positiv*, falls es *hermitesch* ist (d.h. $a = a^*$ erfüllt) und $\sigma_{\mathcal{B}^\sharp}(a) \subset [0, \infty)$ gilt. Wir schreiben dann auch $a \ge 0$. Sind $a, b \in \mathcal{B}$ mit $b - a \ge 0$, so schreiben wir $a \le b$. Hierdurch wird eine teilweise Ordnung auf $\mathcal{B}$ definiert.

Definition 2.3. Eine auf einem Intervall $I_f \subseteq \mathbb{R}$ definierte stetige Funktion $f : I_f \to \mathbb{R}$ heißt *operatormonoton fallend* bzw. *wachsend*, falls für alle hermiteschen Elemente a, b einer jeden C^*–Algebra $\mathcal{B}$ mit $a \le b$ und $\sigma_{\mathcal{B}^\sharp}(a) \cup \sigma_{\mathcal{B}^\sharp}(b) \subseteq I_f$ gilt $f(b) \le f(a)$ bzw. $f(a) \le f(b)$. Hierbei bezeichne $f \mapsto f(a)$ den stetigen Funktionalkalkül aus [**3**], Satz 15.13.

Beispiele 2.4. (a) Die Funktion $t \mapsto 1/t$ ist nach Aufgabe 2.2 (b) operatormonoton fallend.

(b) Für alle $\alpha > 0$ sind die Funktionen

$$f_\alpha : I_\alpha := (-1/\alpha, \infty) \to \mathbb{R}\,, \qquad t \mapsto f_\alpha(t) := \frac{t}{1+\alpha t} = \frac{1}{\alpha}\Big(1 - \frac{1}{1+\alpha t}\Big),$$

auf I_α operatormonoton wachsend. Dies rechnet man leicht mit Hilfe von (a) nach (vergl. Aufgabe 2.2).

Definition 2.5. Sei $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ eine Banachalgebra. Unter einer *linken* bzw. *rechten approximativen Eins* verstehen wir ein Netz $(u_\alpha)_{\alpha\in A}$ in $\mathcal{A}$ mit

$$\forall a \in \mathcal{A} : \qquad \|u_\alpha a - a\| \to 0 \qquad (\text{bzw.} \quad \|a u_\alpha - a\| \to 0)\,.$$

Ist $(u_\alpha)_{\alpha\in A}$ sowohl eine linke wie auch eine rechte approximative Eins in $\mathcal{A}$, so nennen wir $(u_\alpha)_{\alpha\in A}$ eine *zweiseitige approximative Eins* in $\mathcal{A}$. Eine linke bzw. rechte bzw. zweiseitige approximative Eins $(u_\alpha)_{\alpha\in A}$ in $\mathcal{A}$ heißt *beschränkt*, falls $\sup_{\alpha\in A} \|u_\alpha\| < \infty$ gilt.

In C^*-Algebren gibt es immer eine zweiseitige, beschränkte approximative Eins.

SATZ 2.6. *Sei $\mathcal{B}$ eine C^*–Algebra und sei*

$$\mathcal{P}_1 := \{u \in \mathcal{B}\,;\, 0 \leq u,\ \|u\| < 1\}$$

versehen mit der durch

$$u \leq v \,:\Longleftrightarrow\; v - u \geq 0$$

gegebenen teilweisen Ordnung. Dann ist $\mathcal{P}_1$ gerichtet und $(u)_{u\in\mathcal{P}_1}$ ist eine beschränkte, zweiseitige approximative Eins in $\mathcal{B}$.

BEWEIS. Wir zeigen zunächst, daß $\mathcal{P}_1$ gerichtet ist: Seien also $u, v \in \mathcal{P}_1$ beliebig. Die Funktion $h : t \mapsto t/(1-t)$ bildet das Intervall $[0,1)$ auf $[0,\infty)$ ab. Nach dem Funktionalkalkül für positive Elemente sind also auch die Elemente $a := h(u) = (1-u)^{-1}u$ und $b := h(v) = (1-v)^{-1}v$ und damit auch $a+b$ positiv. Wir setzen nun (mit f_1 wie in Beispiel 2.4 (b))

$$w := f_1(a+b) = (1+a+b)^{-1}(a+b)\,.$$

Wegen $a \leq a+b$ und der Tatsache, daß f_1 nach Beispiel 2.4 (b) operatormonoton wachsend ist, folgt wegen $f_1 \circ h = \mathrm{id}_{[0,1)}$:

$$w = f_1(a+b) \geq f_1(a) = f_1(h(u)) = u.$$

Ebenso sieht man, daß $v \leq w$ gilt. Wegen $f_1([0,\infty)) = [0,1)$ ist $w \in \mathcal{P}_1$ mit $u \leq w$ und $v \leq w$.

Zu zeigen ist noch

$$\forall a \in \mathcal{B}: \qquad \lim_{u\in\mathcal{P}_1} \|(1-u)a\| = 0 = \lim_{u\in\mathcal{P}_1} \|a(1-u)\|\,.$$

Wegen $\|a(1-u)\| = \|(a(1-u))^*\| = \|(1-u)a^*\|$ für alle $u \in \mathcal{P}_1$ genügt es, die erste dieser Gleichungen zu beweisen. Da jedes Element von $\mathcal{B}$ eine Linearkombination von höchstens vier positiven Elementen von $\mathcal{B}$ ist, genügt es zu zeigen:

$$\forall 0 \leq a \in \mathcal{B}: \qquad 0 = \lim_{u\in\mathcal{P}_1} \|(1-u)a\|^2 = \lim_{u\in\mathcal{P}_1} \|a(1-u)^2a\|.$$

Wegen

$$\|a(1-u)^2a\| \leq \|a(1-u)a\|$$

für alle $0 \leq a \in \mathcal{B}$, $u \in \mathcal{P}_1$ (nach Aufgabe 2.2 (a) und 2.3 (b)) genügt es die Aussage

$$\forall 0 \leq a \in \mathcal{B}: \qquad \lim_{u\in\mathcal{P}_1} \|a(1-u)a\| = 0 \tag{2.1}$$

zu beweisen. Sei also a ein beliebiges positives Element von $\mathcal{B}$ und sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir setzen $\alpha := \frac{1}{\varepsilon}(\|a\|+1)$. Wegen $\alpha f_\alpha([0,\infty)) = [0,1)$ (f_α wie in Beispiel 2.4 (b)) ist $\alpha f_\alpha(a) \in \mathcal{P}_1$ und es folgt nach Definition von f_α:

$$a(1-\alpha f_\alpha(a))a = a(1+\alpha a)^{-1}a = af_\alpha(a).$$

Für alle $u \in \mathcal{P}_1$ mit $u \geq \alpha f_\alpha(a)$ erhalten wir also (unter Verwendung der Aufgaben 2.2 (a) und 2.3 (b))

$$\|a(1-u)a\| \leq \|a(1-\alpha f_\alpha(a))a\| = \|af_\alpha(a)\| \leq \|a\| \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \|\alpha f_\alpha(a)\| \leq \frac{\|a\|}{\alpha} = \frac{\varepsilon\|a\|}{\|a\|+1} < \varepsilon.$$

Damit ist (2.1) gezeigt und die Behauptung bewiesen. □

LEMMA 2.7. *Sei $\mathcal{B}$ eine C^*–Algebra. Dann gilt (mit f_α wie in Beispiel 2.4 (b)) für alle $a \in \mathcal{B}$:*

$$a^* = \lim_{\alpha\to\infty} \alpha f_\alpha(a^*a)a^* = \lim_{\alpha\to\infty} \alpha(1+\alpha a^*a)^{-1}a^*aa^*.$$

Beweis. Nach dem Beweis zu Satz 2.6 gilt $\alpha f_\alpha(a^*a) \in \mathcal{P}_1$ für alle $\alpha > 0$ und daher

$$\|1 - \alpha f_\alpha(a^*a)\| \le 1.$$

Es folgt daher (unter Verwendung von $(1 - \alpha t f_\alpha(t))t \equiv f_\alpha(t)$ und des Funktionalkalküls für das positive Element a^*a) für $\alpha \to \infty$

$$\begin{aligned}\|(1 - \alpha f_\alpha(a^*a))a^*\|^2 &= \|(1 - \alpha f_\alpha(a^*a))a^*((1 - \alpha f_\alpha(a^*a))a^*)^*\| \\ &= \|(1 - \alpha f_\alpha(a^*a))a^*a(1 - \alpha f_\alpha(a^*a))\| \\ &\le \|(1 - \alpha f_\alpha(a^*a))a^*a\| = \|f_\alpha(a^*a)\| = \frac{\|\alpha f_\alpha(a^*a)\|}{\alpha} \le \frac{1}{\alpha} \to 0\end{aligned}$$

und damit die Behauptung. □

Folgerung 2.8. *Für ein abgeschlossenes Linksideal $\mathcal{J}$ in einer C^*–Algebra $\mathcal{B}$ sind äquivalent:*

(a) *$\mathcal{J}$ ist symmetrisch, d.h. es gilt $\mathcal{J} = \mathcal{J}^* := \{a^* \,;\, a \in \mathcal{J}\}$.*
(b) *$\mathcal{J}$ ist ein zweiseitiges Ideal in $\mathcal{B}$.*

Beweis. (a)$\Longrightarrow$(b): Sei (a) erfüllt, so folgt für alle $x \in \mathcal{B}$, $a \in \mathcal{J}$: Es ist $x^*a^* \in \mathcal{J}$ also auch $ax = (x^*a^*)^* \in \mathcal{J}$. $\mathcal{J}$ ist also ein zweiseitiges Ideal in $\mathcal{B}$.[1]

(b)$\Longrightarrow$(a): Sei nun $\mathcal{J}$ ein abgeschlossenes zweiseitiges Ideal. Dann folgt nach Lemma 2.7 für alle $a \in \mathcal{J}$:

$$a^* = \lim_{\alpha\to\infty} \alpha(1 - \alpha a^*a)^{-1}a^*aa^* \in \mathcal{J}\,,$$

d.h. $\mathcal{J}$ ist symmetrisch. □

Mit dieser Folgerung erhalten wir unmittelbar:

Folgerung 2.9. *Sei $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ eine C^*–Algebra und $\mathcal{J}$ ein abgeschlossenes zweiseitiges Ideal in $\mathcal{B}$. Dann ist $\mathcal{J}$ versehen mit der auf $\mathcal{J}$ eingeschränkten Norm $\|\cdot\|$ und der auf $\mathcal{J}$ eingeschränkten Involution ebenfalls eine C^*–Algebra, besitzt also nach Satz 2.6 eine beschränkte, zweiseitige approximative Eins aus positiven Elementen.*

Ist $\mathcal{J}$ ein abgeschlossenes zweiseitiges Ideal in einer C^*–Algebra $\mathcal{B}$, so ist $\mathcal{B}/\mathcal{J}$ versehen mit der Quotientennorm wieder eine Banachalgebra und wir können auf $\mathcal{B}/\mathcal{J}$ eine Involution definieren durch

$$(a + \mathcal{J})^* := a^* + \mathcal{J} \qquad \text{für alle } a \in \mathcal{B}.$$

Da $\mathcal{J}$ ein symmetrisches Ideal ist, ist diese Involution wohldefiniert. Es gilt sogar:

Satz 2.10. *Ist $\mathcal{J}$ ein abgeschlossenes zweiseitiges Ideal in einer C^*–Algebra $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$, so ist die Quotientenalgebra $\mathcal{B}/\mathcal{J}$ bezüglich der Quotientennorm und der oben angegebenen Involution eine C^*–Algebra. Ist $(u)_{u\in\mathcal{P}_1}$ mit $\mathcal{P}_1 := \{u \in \mathcal{J}\,;\, u \ge 0, \|u\| < 1\}$ die gemäß Satz 2.6 angegebene beschränkte, zweiseitige approximative Eins in $\mathcal{J}$, so gilt für alle $a \in \mathcal{B}$:*

$$\|a + \mathcal{J}\|_{\mathcal{B}/\mathcal{J}} = \inf_{x\in\mathcal{J}} \|a - x\| = \lim_{u\in\mathcal{P}_1} \|a(1 - u)\| = \lim_{u\in\mathcal{P}_1} \|(1 - u)a\|. \tag{2.2}$$

Beweis. Sei $a \in \mathcal{B}$ beliebig und $\delta := \|a + \mathcal{J}\|_{\mathcal{B}/\mathcal{J}} = \inf_{x\in\mathcal{J}} \|a - x\|$. Wegen $au \in \mathcal{J}$ für alle $u \in \mathcal{P}_1$ folgt

$$\delta^2 \le \|a(1 - u)\|^2 = \|a(1 - u)^2a^*\| \le \|a(1 - u)a^*\|. \tag{2.3}$$

Wegen $a(1 - u)a^* \le a(1 - v)a^*$ für alle $u, v \in \mathcal{P}_1$ mit $u \le v$ existiert der Grenzwert

$$\gamma := \lim_{u\in\mathcal{P}_1} \|a(1 - u)a^*\| = \inf_{u\in\mathcal{P}_1} \|a(1 - u)a^*\|.$$

[1] Die Abgeschlossenheit von $\mathcal{J}$ wurde für diesen Beweisteil nicht benötigt.

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig und $x \in \mathcal{J}$ mit $\|a - x\| \leq \delta + \varepsilon$. Dann folgt für alle $u \in \mathcal{P}_1$:

$$(\delta + \varepsilon)^2 \geq \|a - x\| \cdot \|1 - u\| \cdot \|a^* - x^*\| \geq \|(a - x)(1 - u)(a^* - x^*)\|$$

und hieraus wegen $\lim_{u \in \mathcal{P}_1} \|x(1 - u)\| = 0 = \lim_{u \in \mathcal{P}_1} \|(1 - u)x^*\|$

$$(\delta + \varepsilon)^2 \geq \lim_{u \in \mathcal{P}_1} \|a(1 - u)a^*\| = \gamma.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt $\delta^2 \geq \gamma$. Wegen (2.3) existiert also auch der Grenzwert $\lim_{u \in \mathcal{P}_1} \|a(1 - u)\|^2$ und es gilt

$$\delta^2 = \|a + \mathcal{J}\|^2_{\mathcal{B}/\mathcal{J}} \leq \lim_{u \in \mathcal{P}_1} \|a(1 - u)\|^2 \leq \gamma \leq \delta^2.$$

Hiermit folgt das vorletzte Gleichheitszeichen in (2.2). Das verbleibende Gleichheitszeichen zeigt man analog.

Für alle $a \in \mathcal{B}$ gilt somit

$$\begin{aligned}\|(a + \mathcal{J})^*(a + \mathcal{J})\|_{\mathcal{B}/\mathcal{J}} &= \|a^*a + \mathcal{J}\|_{\mathcal{B}/\mathcal{J}} = \lim_{u \in \mathcal{P}_1} \|a^*a(1 - u)\| \geq \lim_{u \in \mathcal{P}_1} \|(1 - u)a^*a(1 - u)\| \\ &\geq \lim_{u \in \mathcal{P}_1} \|a(1 - u)\|^2 = \|a + \mathcal{J}\|^2_{\mathcal{B}/\mathcal{J}}.\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}\|(a + \mathcal{J})^*\|_{\mathcal{B}/\mathcal{J}} &= \|a^* + \mathcal{J}\|_{\mathcal{B}/\mathcal{J}} = \lim_{u \in \mathcal{P}_1} \|a^*(1 - u)\| = \lim_{u \in \mathcal{P}_1} \|(a^*(1 - u))^*\| \\ &= \lim_{u \in \mathcal{P}_1} \|(1 - u)a\| = \|a + \mathcal{J}\|_{\mathcal{B}/\mathcal{J}}\end{aligned}$$

und der Submultiplikativität der Quotientennorm folgt auch

$$\|(a + \mathcal{J})^*(a + \mathcal{J})\|_{\mathcal{B}/\mathcal{J}} \leq \|(a + \mathcal{J})^*\|_{\mathcal{B}/\mathcal{J}} \|a + \mathcal{J}\|_{\mathcal{B}/\mathcal{J}} = \|a + \mathcal{J}\|_{\mathcal{B}/\mathcal{J}^2}.$$

Also ist die Bedingung (d) aus Definition 2.1 für die Quotientennorm $\|\cdot\|_{\mathcal{B}/\mathcal{J}}$ erfüllt und $(\mathcal{B}/\mathcal{J}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}/\mathcal{J}})$ ist eine C^*–Algebra. □

Ist $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, so ist die Menge $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ der komakten Operatoren von $\mathcal{H}$ in sich bekanntlich (siehe z.B. [**3**], Lemma 9.4) ein abgeschlossenes zweiseitiges Ideal. Die *Calkin-Algebra* $\mathcal{Q}(\mathcal{H}) := \mathcal{L}(\mathcal{H})/\mathcal{K}(\mathcal{H})$ ist also nach Satz 2.10 wieder eine C^*-Algebra.

C^*–Algebren haben die schöne Eigenschaft, daß unitale $*$-Monomorphismen schon Isometrien sind.

Satz 2.11. *Seien $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ und $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ zwei C^*–Algebren mit Einselementen $1_{\mathcal{A}}$ bzw. $1_{\mathcal{B}}$. Dann ist jeder unitale $*$-Monomorphismus $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ schon eine Isometrie.*

Beweis. Aus der Funktionalanalysis ist bekannt (vergl. [**3**], Aufgabe 15.4), daß Φ schon stetig ist mit $\|\Phi\| = 1$. Sei $a \in \mathcal{A}$ beliebig. Wegen $\|a\|^2_{\mathcal{A}} = \|a^*a\|_{\mathcal{A}}$ und $\|\Phi(a)\|^2_{\mathcal{B}} = \|\Phi(a)^*\Phi(a)\|_{\mathcal{B}} = \|\Phi(a^*a)\|_{\mathcal{B}}$ genügt es $\|\Phi(a^*a)\|_{\mathcal{B}} = \|a^*a\|_{\mathcal{A}}$ zu zeigen. Mit a^*a ist auch $\Phi(a^*a) = \Phi(a)^*\Phi(a)$ positiv. Sei $\mathcal{A}_0$ bzw. $\mathcal{B}_0$ die von a^*a und $1_{\mathcal{A}}$ bzw. von $\Phi(a^*a)$ und $1_{\mathcal{B}}$ erzeugte unitale kommutative abgeschlossene C^*–Unteralgebra von $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{B}$ und sei $\Phi_0 : \mathcal{A}_0 \to \mathcal{B}_0$ die Einschränkung von Φ auf $\mathcal{A}_0$. Die transponierte Abbildung $\Phi_0' : \mathcal{B}_0' \to \mathcal{A}_0'$ ist dann stetig bezüglich der schwach-$*$-Topologien auf $\mathcal{B}_0'$ bzw. $\mathcal{A}_0'$. Insbesondere ist also

$$\Phi_0'(\Delta(\mathcal{B}_0)) = \{\varphi \circ \Phi_0 \,;\, \varphi \in \Delta(\mathcal{B}_0)\}$$

als stetiges Bild des kompakten Hausdorffraums $\Delta(\mathcal{B}_0)$ eine kompakte Teilmenge von $\Delta(\mathcal{A}_0)$. Nach dem Satz von Gelfand und Neumark (siehe etwa Satz 5.8 in [**3**]) ist der Gelfandhomomorphismus von $\mathcal{A}_0$ (bzw. $\mathcal{B}_0$) nach $C(\Delta(\mathcal{A}_0))$ (bzw. $C(\Delta(\mathcal{B}_0))$) ein isometrischer $*$-Isomorphismus. Wäre $\Phi_0'(\Delta(\mathcal{B}_0)) \neq \Delta(\mathcal{A}_0)$, so gäbe es also nach dem Urysohnschen Lemma ein Element $x \in \mathcal{A}_0$ mit $\hat{x}(\Phi_0'(\Delta(\mathcal{B}_0))) = \{0\}$ und $\psi(x) = \hat{x}(\psi) = 1$ für ein $\psi \in \Delta(\mathcal{A}_0) \setminus \Phi_0'(\Delta(\mathcal{B}_0))$. Aus $\widehat{\Phi_0(x)}(\varphi) = \varphi(\Phi_0(x)) = 0$ für alle $\varphi \in \Delta(\mathcal{B}_0)$ würde

$\Phi_0(x) = 0$ folgen im Widerspruch zur Injektivität von Φ_0. Es gilt also $\Phi_0'(\Delta(\mathcal{B}_0)) = \Delta(\mathcal{A}_0)$ und somit

$$\|a^*a\|_{\mathcal{A}} = \sup_{\psi\in\Delta(\mathcal{A}_0)} |\psi(a^*a)| = \sup_{\varphi\in\Delta(\mathcal{B}_0)} |\varphi(\Phi_0(a^*a))| = \|\Phi_0(a^*a)\|_{\mathcal{B}} = \|\Phi(a^*a)\|_{\mathcal{B}}.$$

Also ist Φ eine Isometrie. □

Schließlich benötigen wir noch

Satz 2.12. *Jede C^*–Algebra $\mathcal{B}$ mit Einselement 1 ist halbeinfach, d.h. erfüllt* $\mathrm{rad}(\mathcal{B}) = \{0\}$.

Beweis. Das Radikal einer Algebra mit Eins ist gerade der Durchschnitt über alle maximalen Linksideale und stimmt mit dem Durchschnitt über alle maximalen Rechtsideale überein (vergl. z.B. [**3**], Satz 0.10). Wir führen den Beweis indirekt und nehmen an, daß es ein von Null verschiedenes Element $a \in \mathrm{rad}\,\mathcal{B}$ gibt. Wegen $0 \neq \|a\|^2 = \|a^*a\|$ ist dann auch $a^*a \in \mathrm{rad}\,\mathcal{B}$ und von Null verschieden. Wegen $a^*a \geq 0$ ist

$$0 \neq \sup\{|z|\,;\, z \in \sigma_{\mathcal{B}}(a^*a)\} = \|a^*a\| \in \sigma_{\mathcal{B}}(a^*a).$$

Insbesondere ist $\|a^*a\|1 - a^*a$ nicht invertierbar, muß also in einem maximalen Linksideal $\mathcal{J}$ liegen. Wegen $a^*a \in \mathrm{rad}\,\mathcal{B} \subseteq \mathcal{J}$ folgt $1 = \frac{1}{\|a^*a\|}(\|a^*a\|1 - a^*a + a^*a) \in \mathcal{J}$ im Widerspruch dazu, daß $\mathcal{J}$ ein echtes Ideal ist. Daher muß $\mathrm{rad}\,\mathcal{B} = \{0\}$ gelten. □

2.2. Die Douglasvariante des lokalen Prinzips

Nach den Vorbereitungen des vorherigen Abschnitts können wir nun das lokale Prinzip in der Variante von Douglas für C^*–Algebren herleiten.

Satz 2.13. *Sei $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ eine C^*–Algebra mit Einselement* 1 *und sei $\mathcal{Z}$ eine Unteralgebra von $Z(\mathcal{B})$, so daß* (1.1) *erfüllt ist. Dann ist $\Gamma_{\mathcal{Z}}(\mathcal{B})$ wieder eine C^*–Algebra und die Abbildung $\Gamma_{\mathcal{Z}} : \mathcal{B} \to \Gamma_{\mathcal{Z}}(\mathcal{B})$ ist ein unitaler, isometrischer $*$–Isomorphismus. Ist $\mathcal{Z}$ eine C^*–Unteralgebra von $Z(\mathcal{B})$, so gilt $\Delta_{\mathcal{B}}(\mathcal{Z}) = \Delta(\mathcal{Z})$.*

Beweis. Für alle $\varphi \in \Delta_{\mathcal{B}}(\mathcal{Z})$ ist $\mathcal{I}(\varphi)$ nach Lemma 1.4 ein echtes zweiseitiges Ideal in $\mathcal{B}$ und nach Satz 2.10 ist die zugehörige mit der Quotientennorm versehene lokale Banachalgebra $\mathcal{B}/\mathcal{I}(\varphi)$ mit ihrer kanonischen Involution eine C^*–Algebra. Man verifiziert leicht, daß dann auch

$$\mathcal{B}^\infty := \Big\{a = (a_\varphi)_{\varphi\in\Delta_{\mathcal{B}}(\mathcal{Z})} \in \prod_{\varphi\in\Delta_{\mathcal{B}}(\mathcal{Z})} \mathcal{B}/\mathcal{I}(\varphi)\,;\, \|a\|_\infty := \sup_{\varphi\in\Delta_{\mathcal{B}}(\mathcal{Z})} \|a_\varphi\|_{\mathcal{B}/\mathcal{I}(\varphi)} < \infty\Big\}$$

bezüglich der Norm $\|\cdot\|_\infty$ mit der komponentenweisen Involution wieder eine C^*–Algebra ist. Die Abbildung

$$x \mapsto \Gamma_{\mathcal{Z}}(x) = \hat{x} = (\hat{x}(\varphi))_{\varphi\in\Delta_{\mathcal{B}}(\mathcal{Z})} = \pi_\varphi(x)$$

ist dann ein unitaler $*$-Homomorphismus von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}^\infty$, der wegen

$$\|\hat{x}\|_\infty = \sup_{\varphi\in\Delta_{\mathcal{B}}(\mathcal{Z})} \|\pi_\varphi(x)\|_{\mathcal{B}/\mathcal{I}(\varphi)} \leq \|x\|$$

stetig ist. Da $\mathcal{B}$ nach Satz 2.12 als unitale C^*–Algebra halbeinfach ist, ist $\Gamma_{\mathcal{Z}}$ nach Folgerung 1.11 injektiv und somit nach Satz 2.11 eine Isometrie. Insbesondere ist $\Gamma_{\mathcal{Z}}(\mathcal{B})$ als abgeschlossene $*$-Unteralgebra von $\mathcal{B}^\infty$ wieder eine C^*–Algebra.

Sei nun speziell $\mathcal{Z}$ eine C^*–Unteralgebra von $Z(\mathcal{B})$. Dann ist $\mathcal{Z}$ nach dem Satz von Gelfand und Neumark isometrisch $*$-isomorph zu $C(\Delta(\mathcal{Z}))$. Wir machen die Annahme: $\Delta_{\mathcal{B}}(\mathcal{Z}) \neq \Delta(\mathcal{Z})$. Dann gibt es ein $\psi \in \Delta(\mathcal{Z}) \setminus \Delta_{\mathcal{B}}(\mathcal{Z})$. Nach Lemma 1.5 ist $\Delta_{\mathcal{B}}(\mathcal{Z})$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\Delta(\mathcal{Z})$. Nach dem Lemma von Urysohn gibt es also ein $z \in \mathcal{Z}$ mit $\psi(z) = 1$ und $\varphi(z) = 0$ also auch $z \in \mathcal{I}(\varphi)$ für alle $\varphi \in \Delta_{\mathcal{B}}(\mathcal{Z})$. Es folgt $\Gamma_{\mathcal{Z}}(z) = 0$

im Widerspruch zur bereits gezeigten Injektivität von $\Gamma_{\mathcal{Z}}$. Also muß $\Delta_{\mathcal{B}}(\mathcal{Z}) = \Delta(\mathcal{Z})$ gelten. $\square$

Übungsaufgaben zu Kapitel 2

AUFGABE 2.1. Sei $\mathcal{B}$ eine C^*–Algebra (nicht notwendig mit einem Einselement). Zeigen Sie:

(a) Für $a \in \mathcal{B}$ gilt $a \geq 0$ genau dann, wenn es ein positives Element $b \in \mathcal{B}$ gibt mit $b^2 = a$.
(b) Ist $a \in \mathcal{B}$ hermitesch, so gibt es positive Elemente $u, v \in \mathcal{B}$ mit $uv = vu = 0$ und $a = u - v$.
(c) Jedes Element von $\mathcal{B}$ ist Linearkombination von vier positiven Elementen von $\mathcal{B}$.

AUFGABE 2.2. Sei $\mathcal{B}$ eine C^*–Algebra und seien $a, b \in \mathcal{B}$ hermitesch mit $a \leq b$. Zeigen Sie:

(a) Für alle $x \in \mathcal{B}$ gilt $x^*ax \leq x^*bx$.
(b) Sind a, b invertierbar mit $0 \leq a \leq b$, so gilt $0 \leq b^{-1} \leq a^{-1}$ in $\mathcal{B}^\sharp$.
Hinweis: Verwenden Sie (a) und Aufgabe 2.1 (a).
(c) Für alle $\alpha > 0$ mit $\sigma_{\mathcal{B}^\sharp}(a) \cup \sigma_{\mathcal{B}^\sharp}(b) \subseteq I_\alpha := (1/\alpha, \infty)$ gilt $(1+\alpha a)^{-1}a, (1+\alpha b)^{-1}b \in \mathcal{B}$ und $(1+\alpha a)^{-1}a \leq (1+\alpha b)^{-1}b$.
Hinweis: Verwenden Sie (b) und die Darstellung

$$\frac{t}{1+\alpha t} = \frac{1}{\alpha}\Big(1 - \frac{1}{1+\alpha t}\Big), \qquad (t > 1/\alpha).$$

AUFGABE 2.3. Sei $\mathcal{B}$ eine C^*–Algebra und seien $a, b \in \mathcal{B}$ positive Elemente mit $a \leq b$. Zeigen Sie:

(a) $a \leq \|a\| 1$ in $\mathcal{B}^\sharp$.
(b) $\|a\| \leq \|b\|$.

Hinweis: Verwenden Sie den aus der Funktionalanalysis bekannten Funktionalkalkül für normale (und damit insbesondere auch für positive) Elemente in C^*–Algebren mit Einselement.

AUFGABE 2.4. Sei $\mathcal{A}$ eine C^*–Algebra. Zeigen Sie: Ist $\mathcal{J}$ ein abgeschlossenes zweiseitiges Ideal und $\mathcal{B}$ eine C^*–Unteralgebra von $\mathcal{A}$, so ist $\mathcal{B} + \mathcal{J}$ eine C^*–Unteralgebra von $\mathcal{A}$.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst daß der allgemeine Fall der Aufgabenstellung sich zurückführen läßt auf den den Fall, daß $\mathcal{A}$ ein Einselement 1 besitzt und daß $1 \in \mathcal{B}$ gilt. Verifizieren Sie in dieser Situation, daß $\mathcal{B}/(\mathcal{B} \cap \mathcal{J})$ in kanonischer Weise eine C^*–Algebra ist und daß durch $b + \mathcal{B} \cap \mathcal{J} \mapsto b + \mathcal{J}$ ein $*$–Monomorphismus von $\mathcal{B}/(\mathcal{B} \cap \mathcal{J})$ nach $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ gegeben ist. Schließen Sie sodann auf die Abgeschlossenheit von $\mathcal{B} + \mathcal{J}$.

AUFGABE 2.5. Sei $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ eine C^*–Algebra mit Einselement 1 und sei $\mathcal{S}$ eine Teilmenge von $\mathcal{S}$, so daß die von $\mathcal{S}$ in $\mathcal{B}$ algebraisch erzeugte Unteralgebra $\mathcal{S}_0$ von $\mathcal{B}$ dicht in $\mathcal{B}$ liegt. Mit $\mathrm{com}(\mathcal{S})$ bezeichnen wir das kleinste, abgeschlossene, zweiseitige Ideal in $\mathcal{B}$ das alle *Kommutatoren*

$$ab - ba\,, \qquad (a, b \in \mathcal{S})$$

von $\mathcal{S}$ enthält. Wir nennen $\mathrm{com}(\mathcal{S})$ das *Kommutatorideal* von $\mathcal{S}$ in $\mathcal{B}$. Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{com}(\mathcal{S}) = \mathrm{com}(\mathcal{S}_0) = \mathrm{com}(\mathcal{B})$.

(b) Die Quotientenalgebra $\mathcal{B}/\operatorname{com}(\mathcal{S})$ ist eine kommutative C^*–Algebra.

Aufgabe 2.6. Wir betrachten die Menge $\mathcal{C} := C([0,1], M_2(\mathbb{C}))$ aller auf $[0,1]$ stetigen Funktionen mit Werten in der Menge aller 2×2-Matrizen. Versehen mit den punktweisen Operationen der Addition, der Multiplikation, der Multiplikation mit Skalaren und der und der durch die punktweise Adjungiertenbildung definierten Involution sowie der durch

$$\|A\| := \sup_{t \in [0,1]} \|A(t)\|_s \qquad (A \in C([0,1], M_2(\mathbb{C})))$$

definierten Norm ist dies eine C^*–Algebra. Hierbei sei $\|\cdot\|_s$ die Operatornorm auf $\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ bezüglich der euklidischen Norm auf $\mathbb{C}^2$.

(a) Zeigen Sie, daß $\|\cdot\|$ tatsächlich eine C^*–Norm auf $C([0,1], M_2(\mathbb{C}))$ ist.
(b) Berechnen Sie das Zentrum $\mathcal{Z}$ von $C([0,1], M_2(\mathbb{C}))$.
(c) Geben Sie die Menge $\Delta(\mathcal{Z})$ aller nichtrivialen multiplikativen linearen Funktionale und die Menge $\Delta_{\mathcal{C}}(\mathcal{Z})$ aller nichtrivialen $\mathcal{C}$–erweiterbaren multiplikativen linearen Funktionale auf $\mathcal{Z}$ an.
(d) Berechnen Sie für alle $\varphi \in \Delta_{\mathcal{C}}(\mathcal{Z})$, $A \in \mathcal{C}$; die zu φ gehörige lokale Banachalgebra $\mathcal{C}_\varphi$ und das Spektrum von $\pi_\varphi(A)$ in $\mathcal{C}_\varphi$.

Aufgabe 2.7. Sei $\mathcal{C}$ die C^*–Algebra aus der vorhergehenden Aufgabe und sei $\mathcal{B}$ die Menge aller derjenigen Matrixfunktionen

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \in \mathcal{C}\,,$$

die den folgenden Bedingungen genügen:

$a_{1,1}(0) = a_{2,2}(1)$ und $a_{j,k}(0) = a_{j,k}(1) = 0$ für all $j,k \in \{1,2\}$ mit $j \neq k$.

(a) Zeigen Sie, daß $\mathcal{B}$ eine abgeschlossene C^*–Unteralgebra von $\mathcal{C}$ ist.
(b) Geben Sie alle multiplikativen linearen Funktionale auf $\mathcal{B}$ an.
(c) Berechnen Sie $Z(\mathcal{B})$ sowie $\Delta(Z(\mathcal{B}))$ und $\Delta_{\mathcal{B}}(Z(\mathcal{B}))$.
(d) Berechnen Sie für alle $\varphi \in \Delta_{\mathcal{B}}(\mathcal{Z})$, $A \in \mathcal{B}$; die zu φ gehörige lokale Banachalgebra $\mathcal{B}_\varphi$ und das Spektrum von $\pi_\varphi(A)$ in $\mathcal{B}_\varphi$.

KAPITEL 3

Hardy–Räume auf $\mathbb{T}$

Wir geben hier nur eine kurze Einführung in die Theorie der Hardy–Räume auf der Einheitskreislinie $\mathbb{T}$, soweit sie im folgenden Kapitel für die Behandlung der Toeplitzoperatoren auf $H^2(\mathbb{T})$ benötigt wird. Für die allgemeine Theorie der Hardy–Räume (im eindimensionalen Fall) verweisen wir auf die Monographien [**20, 17, 24, 32**].

3.1. Definition und erste Eigenschaften

Wir verwenden auf $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| = 1\}$ das normalisierte Lebesguemaß, so daß also

$$\int_{\mathbb{T}} f(z)\, dm(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) dt$$

für alle auf $\mathbb{T}$ Lebesgue-integrierbaren Funktionen f gilt. Für $1 \leq p < \infty$ sei $L^p(\mathbb{T})$ wie üblich der Raum aller auf $\mathbb{T}$ bezüglich m betragsmäßig zur p-ten Potenz integrierbaren Borel-meßbaren Funktionen modulo der Lebesgue-Nullfunktionen. Versehen mit der durch

$$\|f\|_p := \left(\int_{\mathbb{T}} |f(z)|^p \, dm \right)^{1/p} \qquad (f \in L^p(\mathbb{T}))$$

definierten Norm ist dies bekanntlich ein Banachraum in dem die Menge aller trigonometrischen Polynome dicht liegt.

Mit $\operatorname{rca}(\mathbb{T})$ bezeichnen wir die Menge der regulären, σ-additiven $\mathbb{C}$–wertigen Mengenfunktionen auf den Borelmengen von $\mathbb{T}$. Sei μ ein positives Maß aus $\operatorname{rca}(\mathbb{T})$. Statt $L^p(\mathbb{T}, \mu)$ schreiben wir kurz $L^p(\mu)$.

Die Familie $\mathfrak{D}_{\mathbb{Q}}$

$$\mathfrak{D}_{\mathbb{Q}} := \big\{ D(x + iy, \rho) = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z - x - iy| < \rho\}\,;\, x, y, \rho \in \mathbb{Q} \big\}$$

aller offenen Kreisscheiben mit rationalen Radien, und Mittelpunkten mit rationalen Real- und Imaginärteilen ist abzählbar. Für eine Borel-meßbare Funktion $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ ist

$$V_f := \bigcup \{D \in \mathfrak{D}_{\mathbb{Q}}\,;\, \mu(f^{-1}(D)) = 0\}$$

eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$. Wegen der σ-Additivität von μ folgt

$$\mu(f^{-1}(V_f)) = 0.$$

Die Menge V_f ist die größte offene Teilmenge V von $\mathbb{C}$ mit $\mu(f^{-1}(V)) = 0$. Wir definieren den *μ–wesentlichen Wertebereich* $\operatorname{ess\,ran}(f)$ von f durch

$$\operatorname{ess\,ran}(f) := \mathbb{C} \setminus V_f$$

und das *μ–wesentliche Supremum von f auf* $\mathbb{T}$ durch

$$\operatorname*{ess\,sup}_{z \in \mathbb{T}} |f(z)| := \sup_{w \in \operatorname{ess\,ran}(f)} |w|.$$

Die Funktion f heißt auf $\mathbb{T}$ *wesentlich beschränkt* bzgl. μ, falls $\operatorname{ess\,sup}_{z \in \mathbb{T}} |f(z)| < \infty$. In diesem Fall ist der μ–wesentliche Wertebereich von f kompakt.

Zwei meßbare Funktionen f, g, deren Differenz eine μ-Nullfunktion ist haben den selben wesentlichen Wertebereich und das selbe wesentliche Supremum.

Die Menge aller bezüglich μ wesentlich beschränkten Funktionen auf $\mathbb{T}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{L}^\infty(\mu)$. Ist speziell $\mu = m$ das normalisierte Lebesguemaß auf $\mathbb{T}$, so schreiben wir auch $L^\infty(\mathbb{T})$ statt $L^\infty(\mu)$.

f ist genau dann eine μ-Nullfunktion, falls $\operatorname{ess\,sup}_{z\in\mathbb{T}} |f(z)| = 0$. Die Menge aller μ-Nullfunktionen auf $\mathbb{T}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{N}(\mu)$. Offensichtlich gilt

$$\operatorname*{ess\,sup}_{z\in\mathbb{T}} |f(z)| \leq \|f\|_{\mathbb{T}} = \sup_{z\in\mathbb{T}} |f(z)|$$

und $f \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$ genau dann, wenn es eine Funktion $h \in B(\mathbb{T},\mathcal{B})$ gibt mit $f - h \in \mathcal{N}(\mu)$. Die Menge

$$\mathcal{N}^\infty(\mu) := \{f \in B(\mathbb{T},\mathcal{B})\,;\, \operatorname*{ess\,sup}_{z\in\mathbb{T}} |f(z)| = 0\}$$

ist dann ein abgeschlossenes zweiseitiges Ideal in $B(\mathbb{T},\mathcal{B})$. Versehen wir die Quotientenalgebra

$$L^\infty(\mu) := B(\mathbb{T},\mathcal{B})/\mathcal{N}^\infty(\mu)$$

mit ihrer Quotientennorm $\|\cdot\|_\infty$, so wird $L^\infty(\mathbb{T})$ zu einer kommutativen C^*–Algebra (mit der durch $f \mapsto \overline{f}$ gegebenen Involution). Man rechnet nach, daß für alle $f \in B(\mathbb{T},\mathcal{B})$ gilt:

$$\|f + \mathcal{N}^\infty\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{z\in\mathbb{T}} |f(z)|\,.$$

$L^\infty(\mu)$ ist kanonisch isomorph zum Raum aller bezüglich m wesentlich beschränkten Funktionen auf $\mathbb{T}$ modulo $\mathcal{N}(\mu)$.

Man überlegt sich leicht, daß für alle $p \in [1,\infty]$ und alle $f \in L^\infty(\mu)$ der Multiplikationsoperator

$$M_f : L^p(\mu) \to L^p(\mu), \qquad g \mapsto M_f g := fg$$

stetig ist mit $\|M_f\| = \|f\|_\infty$.

Für $1 \leq p \leq \infty$ definieren wir den *Hardy–Raum* $H^p = H^p(\mathbb{T})$ durch

$$\begin{aligned} H^p = H^p(\mathbb{T}) &:= \Big\{f \in L^p(\mathbb{T})\,;\, \hat{f}_{-n} := \int_{\mathbb{T}} f(z) z^n\, dm(z) = 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\Big\} \\ &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \ker(f \mapsto \hat{f}_{-n}). \end{aligned}$$

Da die linearen Funktionale $f \mapsto \hat{f}_{-n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ stetig sind, ist H^P ein abgeschlossener Untervektorraum von $L^p(\mathbb{T})$ und damit wieder ein Banachraum. Offensichtlich gilt

$$\forall p \in [1,\infty] : \qquad H^\infty \subset H^p \subset H^1\,.$$

Für alle $n \in \mathbb{Z}$ bezeichnen wir im folgenden mit e_n die Funktionen $z \mapsto z^n$ auf $\mathbb{T}$. Offensichtlich gilt $\overline{e_n} \equiv e_{-n}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Im Fall $p = 2$ ist $L^2(\mathbb{T})$ ein separabler Hilbertraum bezüglich des durch

$$\langle f, g\rangle := \int_{\mathbb{T}} f(z)\overline{g(z)}\, dm(z) \qquad (f, g \in L^2(\mathbb{T}))$$

gegebenen Skalarprodukts und $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ist eine Orthonormalbasis für $L^2(\mathbb{T})$. Man hat dann

$$H^2(\mathbb{T}) = \{e_{-n}\,;\, n \in \mathbb{N}\}^\perp$$

und die Abbildung $f \mapsto (\hat{f}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definiert einen isometrischen Isomorphismus von H^2 auf $\ell^2(\mathbb{N}_0)$. Insbesondere liegen die Einschränkungen aller holomorphen Polynome auf $\mathbb{T}$ dicht in H^2.

Wir zeigen zunächst, daß eine reellwertige H^1-Funktion schon konstant sein muß.

Satz 3.1. *Ist $f \in H^1(\mathbb{T})$ reellwertig, so ist f konstant.*

Beweis. Ist $f \in H^1(\mathbb{T})$ reellwertig, so ist

$$\alpha := \int_{\mathbb{T}} f(z)\, dm(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it})\, dt \in \mathbb{R}.$$

Durch

$$L(h) := \int_{\mathbb{T}} h(z)(f(z) - \alpha)\, dm(z) = \int_0^{2\pi} h(e^{it})(f(e^{it}) - \alpha)\, dt \qquad (f \in C(\mathbb{T}))$$

ist ein stetiges lineares Funktional $L : C(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$ definiert mit $L(\overline{h}) = \overline{L(h)}$ für alle $h \in C(\mathbb{T})$. Aus der Definition von H^1 und der Definition von L erhält man $L(e_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Also folgt auch

$$L(e_{-n}) = L(\overline{e_n}) = \overline{L(e_n)} = 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Somit verschwindet L auf allen trigonometrischen Polynomen. Da diese nach dem Satz von Weierstraß in $C(\mathbb{T})$ dicht liegen, ist $L = 0$ und daher $f(z) - \alpha = 0$ m-fast überall. □

Folgerung 3.2. *Sind $f, \overline{f} \in H^1(\mathbb{T})$ so ist f konstant.*

Beweis. Sind f und $\overline{f}$ in $H^1(\mathbb{T})$ so sind

$$\mathrm{Re} f = \frac{1}{2}(f + \overline{f}) \quad \text{und} \quad \mathrm{Im} f = \frac{1}{2}(f - \overline{f})$$

reellwertige Funktionen aus $H^1(\mathbb{T})$ und daher nach Satz 3.1 konstant. □

Wir geben nun eine Charakterisierung von H^∞ an und zeigen, daß H^∞ eine Unteralgebra von $L^\infty(\mathbb{T})$ ist.

Satz 3.3. (a) *Für $h \in L^\infty(\mathbb{T})$ gilt:* $\quad h \in H^\infty \iff M_h H^2 \subseteq H^2$.
(b) *H^∞ ist eine Unteralgebra von $L^\infty(\mathbb{T})$.*

Beweis. (a) Gilt $M_h H^2 \subseteq H^2$, so folgt insbesondere $h = M_h 1 \in H^2 \cap L^\infty = H^\infty$.
Sei nun umgekehrt $h \in H^\infty$. Für holomorphe Polynome $z \mapsto p(z) = \sum_{j=0}^m a_j z^j$ und alle $k \in \mathbb{N}$ gilt dann

$$\int_{\mathbb{T}} z^k h(z) p(z)\, dm(z) = \sum_{j=0}^{m} a_j \int_{\mathbb{T}} h(z) z^{j+k}\, dM(z) = 0.$$

Also gilt $M_h p = hp \in H^2$. Da die (Einschränkungen auf $\mathbb{T}$ der) holomorphen Polynome in H^2 dicht liegen und M_h auf $L^2(\mathbb{T})$ stetig ist, folgt $M_h H^2 \subseteq H^2$.
(b) Für alle $g, h \in H^\infty$ gilt nach (a):

$$M_{gh} = M_g(M_h H^2) \subseteq M_g H^2 \subseteq H^2$$

und daher (ebenfalls nach (a)) $gh \in H^\infty$. □

3.2. Der Satz von Beurling

In diesem Abschnitt sei μ ein positives Maß aus $\mathrm{rca}(\mathbb{T})$. Ziel dieses Teils der Vorlesung ist die Charakterisierung der invarianten Unterräume des Operators $M_z := M_{e_1} = M_{\mathrm{id}_{\mathbb{T}}}$ auf dem Hilbertraum $L^2(\mu)$. Wir beachten, daß M_z insbesondere ein unitärer Operator auf $L^2(\mu)$ ist mit $M_z^* = M_z^{-1} = M_{1/z} = M_{\overline{z}} = M_{e_{-1}}$.

Definition 3.4. Sei T ein stetiger linearer Operator auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Ein abgeschlossener T-invarianter Unterraum $\mathcal{M}$ von $\mathcal{H}$ heißt

- *reduzierend*, falls $\mathcal{M}$ auch unter dem adjungierten Operator T^* invariant ist.

- *vollständig nicht reduzierend*, falls $\mathcal{M}$ keinen von $\{0\}$ verschiedenen reduzierenden abgeschlossenen T-invarianten Unterraum enthält.

Ist speziell $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ein unitärer Operator, so ist $T^* = T^{-1}$ und ein abgeschlossener T-invarianter Unterraum $\mathcal{M}$ von $\mathcal{H}$ ist genau dann reduzierend, wenn $\mathcal{M} = T\mathcal{M}$ gilt. Ist $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ unitär und $\mathcal{M}$ ein abgeschlossener T-invarianter Unterraum von $\mathcal{H}$, so ist auch $\mathcal{M}_1 := \bigcap_{n=0}^{\infty} T^n\mathcal{M}$ ein abgeschlossener, T-invarianter Unterraum von $\mathcal{M}$, der offensichtlich auch unter $T^{-1} = T^*$ invariant und somit reduzierend ist und jeden reduzierenden T-invarianten Unterraum von $\mathcal{M}$ enthält. $\mathcal{M}$ ist also in dieser Situation genau dann vollständig nicht reduzierend, wenn $\bigcap_{n=0}^{\infty} T^n\mathcal{M} = \{0\}$ gilt.

Die Menge $C(\mathbb{T})$ der stetigen komplexwertigen Funktionen liegt bekanntlich dicht in $L^p(\mu)$ für $1 \le p < \infty$. Für $p = \infty$ ist dies nicht mehr richtig. Beachten wir jedoch, daß $\langle L^1(\mu), L^\infty(\mu)\rangle$ ein Dualsystem bezüglich der durch

$$\langle f, g\rangle := \int_{\mathbb{T}} f(z)g(z)\, d\mu(z) \qquad (f \in L^1(\mu), g \in L^\infty(\mu))$$

gegebenen kanonischen Dualität ist, so können wir noch zeigen:

Lemma 3.5. *$C(\mathbb{T})$ liegt $\sigma(L^\infty(\mu), L^1(\mu))$–dicht in $L^\infty(\mu)$.*

Beweis. Sei $g \in L^\infty(\mu)$ beliebig. Wir müssen zeigen, daß es zu je endlich vielen $f_1, \dots, f_r \in L^1(\mu)$ und jedem $\varepsilon > 0$ eine stetige Funktion $h \in C(\mathbb{T})$ gibt mit

$$\Big| \int_{\mathbb{T}} f_k(z)(g(z) - h(z))\, d\mu(z)\Big| < \varepsilon \qquad (k = 1, \dots, r).$$

Seien also $f_1, \dots, f_r \in L^1(\mu)$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Da sich jede beschränkte Borel–meßbare Funktion auf $\mathbb{T}$ gleichmäßig durch Borel–meßbare Treppenfunktionen approximieren läßt, gibt es eine Treppenfunktion

$$h_1 = \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{E_j}$$

mit paarweise disjunkten Borelmengen $E_1, \dots, E_m$, so daß

$$\|g - h_1\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2\max_{1\le k\le r} \|f\|_1 + 1}\,. \tag{3.1}$$

Mit $\mu \in \mathrm{rca}(\mathbb{T})$ gilt auch $\mu_{f_k} \in \mathrm{rca}(\mathbb{T})$ mit $\mu_{f_k}(B) := \int_B f(z)\, d\mu(z)$ für alle Borelteilmengen von $\mathbb{T}$. Daher gibt es kompakte Mengen $K_1, \dots, K_m \subset \mathbb{T}$ und (relativ) offene Mengen $U_1, \dots, U_m \subset \mathbb{T}$ mit $K_j \subseteq E_j \subseteq U_j$ und

$$v(\mu_{f_k}, U_j \setminus K_j) = \int_{U_j\setminus K_j} |f_k(z)|\, d\mu(z) < \frac{\varepsilon}{2m(\|h_1\|_\infty + 1)} \qquad (j = 1, \dots, m,\ k = 1, \dots, r). \tag{3.2}$$

Da die Mengen $K_1, \dots, K_m$ paarweise disjunkt sind, gibt es stetige Funktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in C(\mathbb{T})$ mit paarweise disjunkten Trägern $\operatorname{supp}\varphi_j \subset U_j$ und

$$0 \le \varphi_j \le 1 \text{ auf } \mathbb{T} \quad \text{sowie } \varphi_j(z) \equiv 1 \text{ auf } K_j \quad (j = 1, \dots, m).$$

Die Funktion

$$h := \sum_{j=1}^{m} a_j \varphi_j$$

ist dann auf $\mathbb{T}$ stetig und erfüllt wegen (3.1) und (3.2) für $k = 1, \dots, r$

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\mathbb{T}} f_k(g-h)\,d\mu\Big| &\leq \Big|\int_{\mathbb{T}} f_k(g-h_1)\,d\mu\Big| + \Big|\int_{\mathbb{T}} f_k(z)(h_1-h)\,d\mu\Big| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2\max_{1\leq\kappa\leq r}\|f_\kappa\|_1+1}\int_{\mathbb{T}}|f_k|\,d\mu + \sum_{j=1}^m |a_j|\int_{\mathbb{T}}|f_k|\cdot|h_1-h|\,d\mu \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \|h_1\|_\infty \sum_{j=1}^m \int_{supp\varphi_j\setminus K_j} |h_1-h|\cdot|f_k|\,d\mu \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \|h_1\|_\infty \sum_{j=1}^m \int_{U_j\setminus K_j}|f_k|\,d\mu < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung. □

Satz 3.6. *$\{M_g\,;\, g\in L^\infty(\mu)\}$ ist eine maximale kommutative Unteralgebra von $\mathcal{L}(L^2(\mu))$.*

Beweis. Sei $A \in \mathcal{L}(L^2(\mu))$ beliebig mit $AM_g = M_gA$ für alle $g \in L^\infty(\mu)$. Wir müssen zeigen, daß dann schon $A = M_h$ für ein $h \in L^\infty(\mu)$ gilt. Für alle $f \in L^\infty(\mu)$ folgt $f \in L^2(\mu)$ und

$$Af = A(M_f 1) = M_f A(1) = A(1)f.$$

Da $L^\infty(\mu)$ dicht in $L^2(\mu)$ liegt, genügt es zu zeigen, daß $h := A(1)$ auf $\mathbb{T}$ wesentlich beschränkt bezüglich μ ist. Wir gehen indirekt vor und nehmen an, daß dies nicht der Fall ist. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$: Es ist $\mu(S_n) > 0$ mit $S_n := \{z \in \mathbb{T}\,;\, |h(z)| \geq n\}$. Insbesondere folgt für $n \to \infty$:

$$\frac{\|A\chi_{S_n}\|_2^2}{\|\chi_{S_n}\|_2^2} = \frac{\|\chi_{S_n}h\|_2^2}{\mu(S_n)} = \frac{\int_{S_n}|h(z)|^2\,d\mu(z)}{\mu(S_n)} \geq \frac{n^2\mu(S_n)}{\mu(S_n)} = n^2 \to \infty$$

Im Widerspruch zur Stetigkeit von A. Also gilt doch $H = A(1) \in L^\infty(\mu)$. □

Satz 3.7. *Für einen abgeschlossenen Unterraum $\mathcal{M}$ von $L^2(\mu)$ sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *$\mathcal{M} = M_z\mathcal{M}$, d.h. $\mathcal{M}$ ist ein reduzierender M_z-invarianter Unterraum von $L^2(\mu)$.*

(b) *Es gibt eine Borelmenge $B \subseteq \mathbb{T}$ mit*

$$\mathcal{M} = \chi_B L^2(\mu) = L^2(B,\mu) := \{f \in L^2(\mu)\,;\, f \equiv 0 \quad \mu\text{–}\textit{fast überall auf}\ \mathbb{T}\setminus B\}\,.$$

Beweis. Da die Implikation "(b)$\Longrightarrow$(a)" offensichtlich ist, genügt es "(a)$\Longrightarrow$(b)" zu zeigen. Sei also $\mathcal{M}$ ein abgeschlossener Unterraum von $L^2(\mu)$ mit $M_z\mathcal{M} = \mathcal{M}$. Da M_z unitär ist, folgt dann auch $\mathcal{M} = M_z^{-1}\mathcal{M} = M_z^*\mathcal{M} = M_{\overline{z}}\mathcal{M}$. Sei Q die orthogonale Projektion auf $\mathcal{M}$. Dann folgt $M_zQ = QM_zQ$ und $M_z^*Q = QM_z^*Q$ und damit durch Übergang zum Adjungierten:

$$QM_z = QM_zQ = M_zQ \quad \text{und} \quad QM_z^* = QM_z^*Q = M_z^*Q\,.$$

Q kommutiert also mit M_z und $M_z^* = M_{z^{-1}}$ und damit auch mit $M_z^n = M_{z^n}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Da die trigonometrischen Polynome nach der trigonometrischen Variante des Approximationssatzes von Weierstraß in $C(\mathbb{T})$ dicht liegen folgt für alle $f, g \in L^2(\mu)$ und alle $h \in C(\mathbb{T})$:

$$\begin{aligned}0 = \langle (QM_h - M_hQ)f, g\rangle_{L^2} &= \langle (M_hf, Qg\rangle_{L^2} - \langle M_h(Qf), g\rangle_{L^2} \\ &= \int_{\mathbb{T}} h(z)(f(z)\overline{(Qg)(z)} - (Qf)(z)\overline{g(z)})\,d\mu\,.\end{aligned}$$

Wegen $f\overline{Qg} - (Qf)\overline{g} \in L^1(\mu)$ und Lemma 3.5 folgt $\langle (QM_h - M_hQ)f, g\rangle_{L^2} = 0$ für alle $f, g \in L^2(\mu)$ und alle $h \in L^\infty(\mu)$ und damit $QM_h - M_hQ = 0$ für alle $h \in L^\infty(\mu)$. Nach

Satz 3.6 ist $Q = M_\chi$ für eine Funktion $\chi \in L^\infty(\mu)$. Wegen $Q = Q^* = Q^2$ muß χ (bis auf eine μ–Nullfunktion) die charakteristische Funktion einer Borelmenge B sein. Es folgt $\mathcal{M} = QL^2(\mu) = \chi_B L^2(\mu)$. $\square$

Satz 3.8. *Für einen abgeschlossenen Unterraum $\mathcal{M}$ von $L^2(\mu)$ sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *$M_z\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ und $\bigcap_{n=1}^\infty M_{z^n}\mathcal{M} = \{0\}$, d.h. $\mathcal{M}$ ist ein vollständig nicht reduzierender M_z-invarianter Unterraum von $L^2(\mu)$.*

(b) *Es gibt eine Borel–meßbare Funktion φ mit $|\varphi|^2 d\mu = dm$ und $\mathcal{M} = \varphi H^2(\mathbb{T})$.*

Beweis. (i) Ist (b) erfüllt, so wird durch $f \mapsto \Phi(f) := \varphi f$ eine lineare Isometrie von $H^2(\mathbb{T})$ auf $\mathcal{M}$ definiert, denn für alle $f \in H^2(\mathbb{T})$ gilt nach Voraussetzung (b)

$$\|\Phi(f)\|_{L^2(\mu)}^2 = \int_{\mathbb{T}} |\varphi(z)f(z)|^2 \, d\mu(z) = \int_{\mathbb{T}} |f(z)|^2 \, dm = \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \, .$$

Wegen $M_z\Phi(f) = \Phi(M_zf) \in \Phi(H^2(\mathbb{T})$ für alle $f \in H^2(\mathbb{T})$ ist $\mathcal{M} = \Phi(H^2(\mathbb{T}))$ offensichtlich invariant unter M_z. Damit ist (a) erfüllt, denn es gilt:

$$\bigcap_{n=1}^\infty M_{z^n}\mathcal{M} = \Phi\Big(\bigcap_{n=1}^\infty M_{z^n}H^2(\mathbb{T})\Big) = \{0\} \, .$$

(ii) Sei nun umgekehrt die Bedingung (a) erfüllt. Da M_z ein unitärer Operator auf $L^2(\mu)$ ist, ist $M_z(\mathcal{M})$ ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{M}$, der wegen der zweiten Bedingung in (a) von $\mathcal{M}$ verschieden ist. Daher ist das orthogonale Komplement $\mathcal{L} := \mathcal{M} \ominus M_z(\mathcal{M})$ von $M_z(\mathcal{M})$ in $\mathcal{M}$ ein abgeschlossener, vom Nullraum verschiedener Unterraum von $L^2(\mu)$. Da M_z unitär ist folgt durch vollständige Induktion $M_{z^n}(\mathcal{L}) = M_{z^n}(\mathcal{M}) \ominus M_{z^{n+1}}(\mathcal{M})$. Die Räume $M_{z^n}(\mathcal{L})$ sind also paarweise zueinander orthogonal und wir können die orthogonale direkte Summe

$$\mathcal{N} := \bigoplus_{n=0}^\infty M_{z^n}(\mathcal{L}) \subseteq \mathcal{M}$$

bilden. Wegen

$$\mathcal{M} \ominus \mathcal{N} \subseteq \bigcap_{n=1}^\infty M_{z^n}(\mathcal{M}) = \{0\}$$

muß $\mathcal{N} = \mathcal{M}$ gelten.

(iii) Sei nun $\varphi \in \mathcal{L}$ mit $\|\varphi\|_{L^2(\mu)} = 1$ fixiert. Dann folgt $\varphi \in M_{z^n}(\mathcal{M})^\perp$, damit insbesondere $\varphi \perp e_n\varphi$ und somit

$$0 = \langle \varphi, e_n\varphi \rangle_{L^2(\mu)} = \int_{\mathbb{T}} z^{-n}|\varphi(z)|^2 \, d\mu(z)$$

sowie

$$0 = \overline{\langle \varphi, e_n\varphi \rangle_{L^2(\mu)}} = \langle e_n\varphi, \varphi \rangle_{L^2(\mu)} = \int_{\mathbb{T}} z^n|\varphi(z)|^2 \, d\mu(z)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Beachten wir noch

$$1 = \langle \varphi, \varphi \rangle_{L^2(\mu)} = \int_{\mathbb{T}} z|\varphi(z)|^2 \, d\mu(z)$$

so sehen wir, daß

$$\forall n \in \mathbb{Z} : \qquad \int_{\mathbb{T}} z^n|\varphi(z)|^2 \, d\mu(z) = \int_{\mathbb{T}} z^n \, dm \, .$$

Da die trigonometrischen Polynome in $C(\mathbb{T})$ bezüglich der Supremumsnorm dicht liegen, folgt nach der Eindeutigkeitsaussage im Rieszschen Darstellungssatz (siehe z.B. [**3**], Satz 19.30), daß $|\varphi|^2 \, d\mu = dm$ gelten muß.

(iv) Wir zeigen $\dim \mathcal{L} = 1$. Wäre $\dim \mathcal{L} \geq 2$, so gäbe es ein $\psi \in \mathcal{L}$ mit $\|\psi\|_{L^2(\mu)} = 1$ und mit $\psi \perp \varphi$, d.h. mit

$$0 = \int_{\mathbb{T}} \psi(z)\overline{\varphi(z)}\, d\mu(z).$$

Wegen $M_{z^n}(\mathcal{L}) \perp M_{z^m}(\mathcal{L})$ für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$ mit $n \neq m$ folgt

$$0 = \int_{\mathbb{T}} z^{n-m}\psi(z)\overline{\varphi(z)}\, d\mu(z)$$

für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$. Wieder mit der Eindeutigkeitsaussage im Rieszschen Darstellungssatz folgt (wie oben) $\psi(z)\overline{\varphi(z)}\, d\mu(z) = 0$ und somit $\psi(z)\overline{\varphi(z)} \equiv 0$ μ-fast überall. Dies steht aber im Widerspruch zu der in (iii) gezeigten Aussage $|\varphi|^2\, d\mu = dm = |\psi|^2\, d\mu$. Also hat $\mathcal{L}$ die Dimension 1. Da $\Phi : f \mapsto \varphi f$ (wegen $|\varphi|^2\, d\mu = dm$) eine Isometrie von $H^2(\mathbb{T})$ nach $L^2(\mu)$ ist und da die Einschränkungen auf $\mathbb{T}$ der holomorphen Polynome in $H^2(\mathbb{T})$ dicht liegen, folgt: $\mathcal{M} = \overline{\mathrm{LH}\{M_{z^n}\varphi\, ;\, n \in \mathbb{N}_0\}} = \overline{\{p\varphi\, ;\, p \text{ holomorphes Polynom}\}} = \Phi(H^2(\mathbb{T}))$. □

Wir zeigen nun, daß jeder abgeschlossene M_z-invariante Unterraum von $L^2(\mu)$ eine eindeutige orthogonale Zerlegung in einen reduzierenden und einen vollständig nicht reduzierenden M_z-invarianten Unterraum besitzt. In Verbindung dieses Satzes mit der zuvor erhaltenen vollständigen Beschreibung aller reduzierenden und aller vollständig nicht reduzierenden M_z-invarianten Unterräume ergibt sich eine Charakterisierung aller abgeschlossenen, invarianten Unterräume von M_z in $L^2(\mu)$.

Satz 3.9. *Jeder abgeschlossene, invariante Unterraum $\mathcal{M}$ von M_z in $L^2(\mu)$ besitzt eine eindeutige orthogonale Zerlegung*

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2$$

mit abgeschlossenen, invarianten Unterräumen $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$, für die gilt $M_z(\mathcal{M}_1) = \mathcal{M}_1$ und $\bigcap_{n=0}^{\infty} M_{z^n}(\mathcal{M}_2) = \{0\}$.

Beweis. Existenz der Zerlegung: Da M_z ein unitärer Operator ist, ist

$$\mathcal{M}_1 := \bigcap_{n=0}^{\infty} M_z^n(\mathcal{M})$$

ein abgeschlossener, unter M_z invarianter Unterraum von $\mathcal{M}$ mit $M_z(\mathcal{M}_1) = \mathcal{M}_1$ (offensichtlich der größte mit dieser Eigenschaft). Wir setzen $\mathcal{M}_2 := \mathcal{M} \ominus \mathcal{M}_1$. Sind $f \in \mathcal{M}_2$ und $g \in \mathcal{M}_1$ beliebig, so gibt es ein $g_1 \in \mathcal{M}_1$ mit $M_z g_1 = g$ und es folgt

$$\langle g, M_z f\rangle_{L^2(\mu)} = \langle M_z g_1, M_z f\rangle_{L^2(\mu)} = \langle g_1, f\rangle_{L^2(\mu)} = 0,$$

da M_z ein unitärer Operator ist. Also ist auch $\mathcal{M}_2$ unter M_z invariant. Nach Definition von $\mathcal{M}_1$ folgt weiter

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} M_z^n(\mathcal{M}_2) \subseteq \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \{0\}.$$

Die Eindeutigkeitsaussage rechnet man unmittelbar nach. □

Definition 3.10. Eine Funktion $\varphi \in H^\infty(\mathbb{T})$ heißt *innere Funktion*, falls $|\varphi| \equiv 1$ m-fast überall auf $\mathbb{T}$ gilt.

Einfachste Beispiele für innere Funktionen sind die Funktionen $e_n : z \mapsto z^n$, $n \in \mathbb{N}_0$ und die Einschränkungen der Automorphismen der Einheitskreisscheibe auf $\mathbb{T}$. Offensichtlich sind auch endliche Produkte von inneren Funktionen wieder innere Funktionen. Wir beachten auch, daß die Operatoren der Multiplikation mit inneren Funktionen auf $L^2(\mathbb{T})$ unitär und auf $H^2(\mathbb{T})$ lineare Isometrien sind.

Als Folgerung aus Satz 3.8 erhalten wir nun den klassischen Satz von Beurling.

SATZ 3.11 (A. Beurling, 1949). *Ist* $\{0\} \neq \mathcal{M} \subseteq H^2(\mathbb{T})$ *ein unter* M_z *invarianter, abgeschlossener Unterraum von* $H^2(\mathbb{T})$*, so ist* $\mathcal{M} = M_\varphi(H^2(\mathbb{T}))$ *für eine innere Funktion* φ*. Die Funktion* φ *ist hierdurch bis auf einen konstanten Faktor vom Betrag* 1 *eindeutig bestimmt. Umgekehrt ist für alle inneren Funktionen* φ *der Raum* $M_\varphi(H^2(\mathbb{T}))$ *ein unter* M_z *invarianter, abgeschlossener Unterraum von* $H^2(\mathbb{T})$*.*

BEWEIS. Ist φ eine innere Funktion, so ist $\mathcal{M} := M_\varphi(H^2(\mathbb{T}))$ ein abgeschlossener, unter M_z invarianter Unterraum von $L^2(\mathbb{T})$ (da M_φ auf $L^2(\mathbb{T})$ eine Isometrie ist). Da die Einschränkungen holomorpher Polynome auf $\mathbb{T}$ dicht in $H^2(\mathbb{T})$ liegen und für alle solchen Polynome p gilt: $M_\varphi p = \varphi p \in H^\infty(\mathbb{T}) \subset H^2(\mathbb{T})$, ist $\mathcal{M} \subseteq H^2(\mathbb{T})$.

Sei nun umgekehrt $\mathcal{M}$ ein unter M_z invarianter, abgeschlossener Unterraum von $H^2(\mathbb{T})$. Dann erfüllt $\mathcal{M}$ die Voraussetzungen zu Satz 3.8 (mit $\mu := m$). Es gibt daher ein $\varphi \in \mathcal{M} \subseteq H^2(\mathbb{T})$ mit $\varphi H^2(\mathbb{T}) = \mathcal{M}$ und $|\varphi|^2 dm = dm$. Dies ist nur möglich, wenn $|\varphi| \equiv 1$ m–fast überall auf $\mathbb{T}$ gilt. φ ist also eine innere Funktion.

Zur Eindeutigkeitsaussage: Ist auch θ eine innere Funktion mit $M_\theta(H^2(\mathbb{T})) = \mathcal{M} = M_\varphi(H^2(\mathbb{T}))$, so folgt $\varphi = M_\varphi 1 = M_\theta \psi_1$ und $\theta = M_\theta 1 = M_\varphi \psi_2$ mit Funktionen $\psi_1, \psi_2 \in H^2(\mathbb{T})$. Wegen $|\varphi| \equiv 1 \equiv |\theta|$ m-fast überall auf $\mathbb{T}$ sind ψ_1 und ψ_2 ebenfalls innere Funktionen. Wegen $\psi_1(z) = \frac{\theta(z)}{\varphi(z)} = \theta(z)\overline{\varphi(z)}$ und $\psi_2(z) = \frac{\varphi(z)}{\theta(z)} = \varphi(z)\overline{\theta(z)} = \overline{\psi_1(z)}$ m-fast überall sind die Funktionen ψ_1 und ψ_2 (bis auf eine m-Nullfunktion) auf $\mathbb{T}$ konstant und vom Betrag 1. □

Der Satz von Beurling hat viele wichtige und interessante Anwendungen. Wir verwenden ihn auch im Beweis der beiden folgenden klassischen Sätze der Gebrüder F. und M. Riesz.

SATZ 3.12 (F. und M. Riesz, 1916). *Sei* $f \in H^2(\mathbb{T})$ *keine* m*-Nullfunktion. Dann ist* $m(\{z \in \mathbb{T}\,;\, f(z) = 0\}) = 0$

BEWEIS. Sei $B := \{z \in \mathbb{T}\,;\, f(z) = 0\}$ und $\mathcal{M} := H^2(\mathbb{T}) \cap \chi_{\mathbb{T}\setminus B} \cdot L^2(\mathbb{T})$. Dann ist $\mathcal{M}$ ein abgeschlossener unter M_z invarianter Unterraum von $H^2(\mathbb{T})$. Nach dem Satz von Beurling gibt es also eine innere Funktion θ auf $\mathbb{T}$ mit $\mathcal{M} = \theta \cdot H^2(\mathbb{T})$. Insbesondere ist $\theta = \theta \cdot 1 \in \mathcal{M}$ und somit $\theta = \chi_{\mathbb{T}\setminus B} \cdot \theta$. Wegen $|\theta| \equiv 1$ m-fast überall muß $m(B) = 0$ gelten. □

SATZ 3.13 (F. und M. Riesz, 1916). *Sei* $\mu \in \mathrm{rca}(\mathbb{T})$ *mit*

$$\forall n \in \mathbb{N}: \qquad \int_{\mathbb{T}} z^n \, d\mu(z) = 0. \tag{3.3}$$

Dann gibt es eine Funktion $f \in H^1(\mathbb{T})$ *mit* $d\mu = f\,dm$*. Insbesondere ist* μ *bezüglich des normalisierten Lebesguemaßes* m *absolutstetig.*

BEWEIS. Der Beweis benötigt den Satz von Radon-Nykodym, auf den hier aus Zeitgründen nicht eingegangen werden kann[1]. Nach diesem Satz gibt es eine Borel-meßbare Funktion $g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ mit $|g| \equiv 1$ $v(\mu, \cdot)$-fast überall, so daß

$$g\, dv(\mu, \cdot) = d\mu\,,$$

wobei $v(\mu, \cdot)$ die totale Variation von μ bezeichne. Die abgeschlossene lineare Hülle $\mathcal{M}$ von $\{e_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$ in dem Hilbertraum $\mathcal{H} := L^2(\mathbb{T}, v(\mu, \cdot))$ ist offensichtlich unter M_z invariant. Ferner gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\langle z^n, \overline{g}\rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{T}} z^n g(z)\, dv(\mu, \cdot) = \int_{\mathbb{T}} z^n \, d\mu(z) = 0$$

[1] Eine ausführliche Darstellung mit Beweis findet man z.B. in [**39**].

und damit $\overline{g} \in \mathcal{M}^\perp$. Nach Satz 3.9 (angewendet auf $v(\mu,\cdot)$ anstelle von μ) besitzt $\mathcal{M}$ eine eindeutig bestimmte orthogonale Zerlegung $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2$ in abgeschlossene, invariante Unterräume $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ mit $M_z\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_1$ und $\bigcap_{n=0}^\infty M_z^n(\mathcal{M}_2) = \{0\}$. $\mathcal{M}_1$ hat nach Satz 3.7 die Gestalt $\mathcal{M}_1 = \chi_B \cdot L^2(\mathbb{T}, v(\mu,\cdot))$ mit einer Borelmenge $B \subseteq \mathbb{T}$. Wegen $|g|^2 \equiv 1$ fast überall bezüglich $v(\mu,\cdot)$ folgt

$$v(\mu, B) = \int_{\mathbb{T}} \chi_B \overline{g(z)} g(z) dv(\mu, z) = \langle \chi_B \overline{g}, \overline{g} \rangle_{\mathcal{H}} = 0$$

und damit $\mathcal{M}_1 = \{0\}$ und $\mathcal{M} = \mathcal{M}_2$. Nach Satz 3.8 gibt es daher eine Borel–meßbare Funktion φ mit $|\varphi|^2\, dv(\mu,\cdot) = dm$ und $\mathcal{M} = \varphi \cdot H^2(\mathbb{T})$. Wegen $e_1 = \mathrm{id}_{\mathbb{T}} \in \mathcal{M}$ gibt es eine Funktion $h \in H^2(\mathbb{T})$ mit $z = \varphi(z)h(z)$ für $v(\mu,\cdot)$-fast alle $z \in \mathbb{T}$. Insbesondere ist $\varphi(z) \neq 0$ $v(\mu,\cdot)$-fast überall. Daher sind $v(\mu,\cdot)$ und das normalisierte Lebesguenaß m gegenseitig absolutstetig und es gibt nach dem Satz von Radon und Nykodym eine Funktion $f \in L^1(\mathbb{T})$ mit $d\mu = f\, dm$. Wegen (3.3) und nach Definition von $H^1(\mathbb{T})$ folgt $f \in H^1(\mathbb{T})$. □

3.3. Eigenschaften von $H^\infty(\mathbb{T})$ als Banachalgebra

Nach Definition von $H^\infty(\mathbb{T})$ und Satz 3.3 ist $H^\infty(\mathbb{T})$ eine abgeschlossene Unteralgebra von $L^\infty(\mathbb{T})$. Wir wollen einige der multiplikativen linearen Funktionale dieser Banachalgebra identifizieren.

Für Punkte $w \in \mathbb{D}$ und Funktionen $f \in H^1(\mathbb{T})$ definieren wir

$$\mathcal{E}_w(f) := \int_{\mathbb{T}} \frac{f(\zeta)}{1 - w\overline{\zeta}}\, dm(\zeta). \tag{3.4}$$

Hierdurch ist ein stetiges lineares Funktional $\mathcal{E}_w : H^1(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$ auf $H^1(\mathbb{T})$ gegeben mit $\|\mathcal{E}_w\| \le \frac{1}{1-|w|}$. Da die Räume $H^p(\mathbb{T})$ für alle $p \in [1,\infty]$ in $H^1(\mathbb{T})$ enthalten sind mit stetiger Inklusion, ist dann auch (die Restriktion von) $\mathcal{E}_w$ auf allen diesen Räumen stetig. Wegen

$$\frac{f(\zeta)}{1 - w\overline{\zeta}} = \sum_{n=0}^\infty w^n \overline{\zeta}^n f(\zeta)$$

mit absolut-gleichmäßiger Konvergenz auf allen kompakten Teilmengen von $\mathbb{D}$ folgt für alle $f \in H^1(\mathbb{T})$, $w \in \mathbb{D}$:

$$\mathcal{E}_w(f) = \sum_{n=0}^\infty w^n \int_{\mathbb{T}} f(\zeta)\overline{\zeta^n}\, dm(\zeta) = \sum_{n=0}^\infty \hat{f}_n w^n = P(f, w), \tag{3.5}$$

mit (bzgl. w absolut-gleichmäßiger Konvergenz auf allen kompakten Teilmengen von $\mathbb{D}$, wobei das letzte Gleichheitszeichen aus Aufgabe 3.4 folgt. Ist also $p(z) = \sum_{n=0}^d a_n z^n$ ein holomorphes Polynom, so folgt für alle $w \in \mathbb{D}$:

$$\mathcal{E}_w(p) = \sum_{n=0}^d a_n w^n = p(w)\,.$$

Das Funktional $\mathcal{E}_w$ ist also auf der Menge $\mathbb{C}[Z]$ aller holomorphen Polynome multiplikativ. Wir wollen zeigen, daß $\mathcal{E}_w$ auch auf $H^\infty(\mathbb{T})$ multiplikativ ist. Hierzu beweisen wir zunächst:

Lemma 3.14. *Für alle $f, g \in H^2(\mathbb{T})$ ist $fg \in H^1(\mathbb{T})$ und es gilt für alle $w \in \mathbb{D}$:*

$$\mathcal{E}_w(fg) = \mathcal{E}_w(f)\mathcal{E}_w(g).$$

BEWEIS. Da die holomorphen Polynome in $H^2(\mathbb{T})$ dicht liegen gibt es Folgen $(p_n)_{n=1}^\infty$, $(q_n)_{n=1}^\infty$ in $\mathbb{C}[Z]$ mit $\|f-p_n\|_2 \to 0$ und $\|g-q_n\|_2 \to 0$ für $n\to\infty$. Mit der Hölderschen Ungleichung folgt

$$\|fg-p_nq_n\|_1 \le \|(f-p_n)g\|_1 + \|p_n(g-q_n)\|_1 \le \|f-p_n\|_2\|g\|_2 + \|p_n\|_2\|g-q_n\|_n \to 0$$

für $n\to\infty$. Da $H^1(\mathbb{T})$ ein abgeschlossener Unterraum von $L^1(\mathbb{T})$ ist und p_nq_n als holomorphe Polynome in $H^1(\mathbb{T})$ liegen folgt $fg \in H^1(\mathbb{T})$. Wegen der Stetigkeit von $\mathcal{E}_w$ auf $H^1(\mathbb{T})$ und auf $H^2(\mathbb{T})$ und der Multiplikativität von $\mathcal{E}_w$ auf $\mathbb{C}[Z]$ folgt

$$\mathcal{E}_w(fg) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{E}_w(p_nq_n) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{E}_w(p_n)\mathcal{E}_w(q_n) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{E}_w(p_n) \lim_{n\to\infty} \mathcal{E}_w(q_n) = \mathcal{E}_w(f)\mathcal{E}_w(g).$$

□

FOLGERUNG 3.15. *Für alle $w\in\mathbb{D}$ ist $\mathcal{E}_w \in \Delta(H^\infty(\mathbb{T}))$ und die Abbildung $w\mapsto\mathcal{E}_w$ ist eine Homöomorphie von $\mathbb{D}$ (versehen mit der euklidischen Topologie) auf $\{\mathcal{E}_w\,;\,w\in\mathbb{D}\}$ (versehen mit der von $\sigma(H^\infty(\mathbb{T})', H^\infty(\mathbb{T}))$ induzierten Topologie).*

BEWEIS. Aus Lemma 3.14 folgt unmittelbar $\{\mathcal{E}_w\,;\,w\in\mathbb{D}\}\subseteq\Delta(H^\infty(\mathbb{T}))$. Für alle $f\in H^1(\mathbb{T})$ ist die Abbildung $w\mapsto\mathcal{E}_w(f)$ holomorph, also insbesondere stetig. Also ist insbesondere $w\mapsto\mathcal{E}_w$ stetig von $\mathbb{D}$ nach $\Delta(H^\infty(\mathbb{T}))$. Wegen $e_1=\mathrm{id}_{\mathbb{T}}\in H^\infty(\mathbb{T})$ und $\mathcal{E}_w(e_1)=w$ ist $w\mapsto\mathcal{E}_w$ offensichtlich injektiv. Sei schließlich $(\mathcal{E}_{w_a})_{\alpha\in A}$ ein Netz in $\{\mathcal{E}_w\,;\,w\in\mathbb{D}\}$, welches bezüglich $\sigma(H^\infty(\mathbb{T})', H^\infty(\mathbb{T}))$ gegen $\mathcal{E}_w$ konvergiert für ein $w\in\mathbb{D}$. Dann gilt (wegen $e_1=\mathrm{id}_{\mathbb{T}}\in H^\infty(\mathbb{T})$) insbesondere

$$\lim_\alpha w_\alpha = \lim_\alpha \mathcal{E}_{w_\alpha}(e_1) = \mathcal{E}_w(e_1) = w\,.$$

Also ist auch die Umkehrabbildung $\mathcal{E}_w\mapsto w$ stetig. □

Wir werden im folgenden $\mathbb{D}$ mit seinem natürlichen Bild $\{\mathcal{E}_w\,;\,w\in\mathbb{D}\}$ identifizieren und für die Gelfandtransformierte einer Funktion $f\in H^\infty(\mathbb{T})$ schreiben: $\hat f(w):=\hat f(\mathcal{E}_w)=\mathcal{E}_w(f)$ für alle $w\in\mathbb{D}$. Auch für alle Funktionen f aus $H^1(\mathbb{T})$ schreiben wir $\hat f(w)$ statt $\mathcal{E}_w(f)$. Das tiefliegende Corona-Theorem von L. Carleson [**11, 12**] besagt, daß $\mathbb{D}$ in $\Delta(H^\infty(\mathbb{T}))$ dicht liegt.[2]

Aus dem Corona-Theorem folgt insbesondere $\sigma_{H^\infty(\mathbb{T})}(h)=\overline{\hat h(\mathbb{D})}$ für alle $h\in H^\infty(\mathbb{T})$. Wir geben (R. Douglas [**17**] folgend) einen direkten, vom Corona-Theorem unabhängigen Beweis dieser Aussage an:

SATZ 3.16. *Für alle $h\in H^\infty(\mathbb{T})$ gilt $\sigma_{H^\infty(\mathbb{T})}(h)=\overline{\hat h(\mathbb{D})}$.*

BEWEIS. Wegen $\sigma_{H^\infty(\mathbb{T})}(h)=\hat h(\Delta(H^\infty(\mathbb{T})))\supseteq\hat h(\mathbb{D})$ und der Kompaktheit des Spektrums gilt $\overline{\hat h(\mathbb{D})}\subseteq\sigma_{H^\infty(\mathbb{T})}(h)$.

Sei nun $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\overline{\hat h(\mathbb{D})}$ beliebig. Dann ist $\delta:=\mathrm{dist}(\lambda,\overline{\hat h(\mathbb{D})})>0$. Die durch

$$\psi(w) := \frac{1}{\lambda-\hat h(w)} \qquad (w\in\mathbb{D})$$

definierte Funktion ist auf $\mathbb{D}$ holomorph und beschränkt durch $1/\delta$. Ist

$$\psi(w) = \sum_{n=0}^\infty a_n w^n \qquad (w\in\mathbb{D})$$

die Taylorreihenentwicklung von ψ und $0\le r<1$, so gilt

$$\sum_{n=0}^\infty |a_n|^2 r^{2n} = \int_{\mathbb{T}} |\psi(rz)|^2\,dm(z) \le \frac{1}{\delta^2}\,.$$

[2]Einen einfacheren auf T. Wolff zurückgehenden Beweis findet man in [**23, 32**].

Insbesondere folgt $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \leq \frac{1}{\delta^2}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ist die Fourierreihe einer Funktion $f \in H^2(\mathbb{T})$ mit $P(f, \cdot) = \hat{f} = \psi$. Ist $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ die Fourierreihe von $\lambda - h$, so ist

$$\widehat{(\lambda - h)}(w) = \lambda - \hat{h}(w) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n$$

für alle $w \in \mathbb{D}$. Wegen $(\lambda - \hat{h}(w))\psi(w) \equiv 1$ auf $\mathbb{D}$ erhalten wir durch Bildung des Cauchyproduktes der beiden Potenzreihen

$$\sum_{k=0}^{n} b_k a_{n-k} = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ 0 & \text{für } n > 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

Wegen

$$\lim_{N\to\infty} \Big\| \lambda - h - \sum_{n=0}^{N} b_n e_n \Big\|_2 = 0 = \lim_{N\to\infty} \Big\| f - \sum_{n=0}^{N} a_n e_n \Big\|_2$$

folgt $(\lambda - h)f \in H^1(\mathbb{T})$ (siehe Lemma 3.14) und

$$\lim_{N\to\infty} \Big\| (\lambda - h)f - \Big(\sum_{k=0}^{N} b_k e_k \Big) \Big(\sum_{j=0}^{N} a_j e_j \Big) \Big\|_1 = 0.$$

Durch Ausmultiplizieren folgt unter Verwendung von (3.6)

$$\lim_{N\to\infty} \Big\| (\lambda - h)f - 1 - \sum_{n=N}^{2N} c_n^{(N)} e_n \Big\|_1 = 0\,,$$

wobei

$$c_n^{(N)} := \sum_{k=n-N}^{N} b_k a_{n-k} \qquad (N \in \mathbb{N},\, n = N+1, \ldots, 2N).$$

Insbesondere gilt

$$\int_{\mathbb{T}} (\lambda - h(z)) f(z) z^k \, dm(z) = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{für } k \neq 0\,. \end{cases}$$

Nach dem Eindeutigkeitssatz für Fourierreihen von $L^1(\mathbb{T})$-Funktionen (siehe z.B. [**31**]) folgt $(\lambda - h)f \equiv 1$ m–fast überall. Wegen $\lim_{r\to 1^-} \|f - P(f, r\cdot)\|_2 = 0$ und $|P(f, rz)| = |\psi(rz)| \leq \delta^{-2}$ muß auch $|f| \leq \delta^{-2}$ m-fast überall auf $\mathbb{T}$ gelten. Also ist die Funktion $f \in H^2(\mathbb{T}) \cap L^\infty(\mathbb{T}) = H^\infty(\mathbb{T})$ invers zu $\lambda - h$ in $H^\infty(\mathbb{T})$ und es folgt $\lambda \in \rho_{H^\infty(\mathbb{T})}(h)$. □

3.4. Äußere Funktionen

Für $f \in H^2(\mathbb{T})$ sei

$$\mathcal{M}_f := \overline{\{pf\,;\, p \in \mathbb{C}[Z]\}}^{\|\cdot\|_2}\,.$$

Dies ist offensichtlich der kleinste, f enthaltende, abgeschlossene, invariante Unterraum von M_z in $H^2(\mathbb{T})$. Wir nennen f eine *äußere Funktion,* falls $\mathcal{M}_f = H^2(\mathbb{T})$ gilt.

Satz 3.17. *Eine Funktion $f \in H^\infty(\mathbb{T})$ ist genau dann invertierbar in $H^\infty(\mathbb{T})$, wenn sie in $L^\infty(\mathbb{T})$ invertierbar ist und eine äußere Funktion ist.*

Beweis. Ist f in $H^\infty(\mathbb{T})$ invertierbar, so ist $1/f$ in $H^\infty(\mathbb{T})$ also insbesondere m-wesentlich beschränkt auf $\mathbb{T}$ und somit invers zu f in $L^\infty(\mathbb{T})$. Also ist der Multiplikationsoperator M_f auf $L^2(\mathbb{T})$ invertierbar und es gilt

$$\mathcal{M}_f = \overline{M_f(\mathbb{C}[Z])} = M_f(H^2(\mathbb{T})) \supseteq M_f(M_{1/f}(H^2(\mathbb{T}))) = H^2(\mathbb{T}).$$

Dies zeigt, daß f eine äußere Funktion ist.

Sei nun f eine in $L^\infty(\mathbb{T})$ invertierbare äußere Funktion aus $H^\infty(\mathbb{T})$. Insbesondere ist M_f auf $L^2(\mathbb{T})$ invertierbar. Dann ist $fH^2(\mathbb{T}) = M_f(H^2(\mathbb{T}))$ in $L^2(\mathbb{T})$ und also auch in $H^2(\mathbb{T})$ abgeschlossen und offensichtlich unter M_z invariant. Da f eine äußere Funktion ist folgt $fH^2(\mathbb{T}) = \mathcal{M}_f = H^2(\mathbb{T})$. Insbesondere existiert eine Funktion $g \in H^2(\mathbb{T})$ mit $fg = 1$ und es folgt $g = 1/f \in L^\infty(\mathbb{T}) \cap H^2(\mathbb{T}) = H^\infty(\mathbb{T})$. f ist also in $H^\infty(\mathbb{T})$ invertierbar. □

Wir zeigen nun, daß jede nicht identisch verschwindende Funktion aus $H^2(\mathbb{T})$ ein Produkt aus einer inneren und einer äußeren Funktion ist.

Satz 3.18. *Ist $0 \neq f \in H^2(\mathbb{T})$, so gibt es eine innere Funktion θ und eine äußere Funktion g mit $f = \theta g$. Es ist dann $f \in H^\infty(\mathbb{T})$ genau dann, wenn $g \in H^\infty(\mathbb{T})$ gilt.*

Beweis. Nach dem Satz von Beurling ist $\mathcal{M}_f = \theta H^2(\mathbb{T})$ mit einer inneren Funktion θ. Insbesondere gibt es eine Funktion $g \in H^2(\mathbb{T})$ mit $f = \theta g$. Auch zu $\mathcal{M}_g$ gibt es nach dem Satz von Beurling eine innere Funktion θ_0 mit $\mathcal{M}_g = \theta_0 H^2(\mathbb{T})$. Da M_θ auf $L^2(\mathbb{T})$ invertierbar ist, folgt

$$\theta\theta_0 H^2(\mathbb{T}) = M_\theta(\mathcal{M}_g) = M_\theta(\overline{g\mathbb{C}[Z]}) = \overline{\theta g\mathbb{C}[Z]} = \mathcal{M}_f = \theta H^2(\mathbb{T})\,.$$

Es gibt daher eine Funktion $h \in H^2(\mathbb{T})$ mit $\theta = \theta\theta_0 h$. Da θ eine innere Funktion ist, folgt $1 = \theta_0 h$. Da auch θ_0 eine innere Funktion ist, ergibt sich weiter

$$\overline{\theta_0} = h \in H^2(\mathbb{T}) \cap L^\infty(\mathbb{T}) = H^\infty(\mathbb{T}).$$

Nach Satz 3.1 muß θ_0 konstant sein (vom Betrag 1, da θ_0 innere Funktion ist). Es folgt

$$H^2(\mathbb{T}) = \theta_0 H^2(\mathbb{T}) = \mathcal{M}_g\,.$$

Daher ist g eine äußere Funktion.

Wegen $|f| = |\theta g| = |g|$ ist $f \in H^\infty(\mathbb{T})$ genau dann, wenn $g \in H^\infty(\mathbb{T})$. □

Satz 3.19. *Seien $f, g \in H^2(\mathbb{T})$, g eine äußere Funktion. Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *$|f| \leq |g|$ m-fast überall auf $\mathbb{T}$.*
(b) *Es gibt eine Funktion $h \in H^2(\mathbb{T})$ mit $f = gh$ und $|h| \leq 1$ m-fast überall auf $\mathbb{T}$.*

Beweis. Die Implikation (b)$\Longrightarrow$(a) ist offensichtlich. Sei nun (a) erfüllt. Da g eine äußere Funktion ist, gibt es eine Folge $(p_n)_{n=1}^\infty$ in $\mathbb{C}[Z]$ mit $\|1 - gp_n\|_2 \to 0$ für $n \to \infty$. Wegen $|f| \leq |g|$ folgt für alle $n, m \in \mathbb{N}$

$$\|fp_n - fp_m\|_2^2 = \int_{\mathbb{T}} |p_n - p_m|^2 |f|^2\,dm \leq \int_{\mathbb{T}} |p_n - p_m|^2 |g|^2\,dm = \|gp_n - gp_m\|_2^2\,.$$

Daher ist mit $(gp_n)_{n=1}^\infty$ auch die Folge $(fp_n)_{n=1}^\infty$ eine Cauchy–Folge in $H^2(\mathbb{T})$ und somit konvergent bezüglich $\|\cdot\|_2$ gegen eine Funktion $h \in H^2(\mathbb{T})$. Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt

$$\|gh - f\|_1 = \lim_{n\to\infty} \|gh - gp_n f\|_1 \leq \lim_{n\to\infty} \|g\|_2 \|h - p_n f\|_2 = 0.$$

also ist $gh = f$. □

Folgerung 3.20. *Sind $f, g \in H^2(\mathbb{T})$ zwei äußere Funktionen mit $|f| = |g|$ m-fast überall, so gibt es eine Konstante λ vom Betrag 1 mit $f = \lambda g$ m-fast überall.*

Beweis. Nach Satz 3.19 gibt es zwei Funktionen $h_1, h_2 \in H^2(\mathbb{T})$ mit $|h_1| \leq 1$, $|h_2| \leq 1$ und $h_1 f = g$, $h_2 g = f$ m-fast überall. Es folgt $h_1 h_2 g = g$ m-fast überall. Da g keine m-Nullfunktion ist gilt $g \neq 0$ m-fast überall auf $\mathbb{T}$ nach Satz 3.12 und es folgt $h_1 h_2 = 1$ m-fast überall und somit $|h_1| = |h_2| = 1$ und $\overline{h_1} = h_2$ m-fast überall. Nach Folgerung 3.2 muß h_1 (und damit auch h_2) konstant vom Betrag 1 sein. □

Wir wollen nun die Frage untersuchen: Für welche Funktionen $f \in L^2(\mathbb{T})$ gibt es eine äußere Funktion $g \in H^2(\mathbb{T})$ mit $|f| = |g|$ m-fast überall?

Satz 3.21. *Für $f \in L^2(\mathbb{T})$ sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *Es gibt eine äußere Funktion $g \in H^2(\mathbb{T})$ mit $|f| = |g|$ m-fast überall.*

(b) *$\mathcal{N}_f := \overline{f\mathbb{C}[Z]}$ ist ein vollständig nicht reduzierender M_z-invarianter Unterraum.*

Beweis. Ist (a) erfüllt, so folgt nach dem Satz 3.12 von F. und M. Riesz $|f| = |g| \neq 0$ m-fast überall und somit $f = ug$ mit einer Funktion u mit $|u| = 1$ m-fast überall. Es folgt

$$\mathcal{N}_f = \overline{ug\mathbb{C}[Z]} = u\overline{g\mathbb{C}[Z]} = u\mathcal{M}_g = uH^2(\mathbb{T}).$$

Nach Satz 3.8 ist $\mathcal{N}_f$ vollständig nicht reduzierend.

Sei nun $\mathcal{N}_f$ ein vollständig nicht reduzierender M_z-invarianter Unterraum. Nach Satz 3.8 (angewendet mit $\mu = m$) gibt es eine Borel-meßbare Funktion φ mit $|\varphi|^2\, dm = dm$, also insbesondere mit $|\varphi| = 1$ m-fast überall, so daß $\mathcal{N}_f = \varphi H^2(\mathbb{T})$. Wegen $f \in \mathcal{N}_f$ gibt es also ein $g \in H^2(\mathbb{T})$ mit $f = \varphi g$. Nach dem Faktorisierungssatz 3.18 gibt es eine innere Funktion θ und eine äußere Funktion h mit $g = \theta h$. Insbesondere folgt $|f| = |\varphi| \cdot |\theta| \cdot |g| = |g|$ m-fast überall. (a) ist also erfüllt. □

Folgerung 3.22. *Ist $f \in L^2(\mathbb{T})$ mit $\varepsilon \leq |f|$ m-fast überall für eine Konstante $\varepsilon > 0$, so gibt es eine äußere Funktion $g \in H^2(\mathbb{T})$ mit $|f| = |g|$ m-fast überall.*

Beweis. Nach Satz 3.21 genügt es zu zeigen, daß $\mathcal{N}_f$ vollständig nicht reduzierend ist. Nach Satz 3.9 besitzt $\mathcal{N}_f$ eine eindeutige orthogonale Zerlegung $\mathcal{N}_f = \mathcal{M}_0 \oplus \mathcal{M}_1$ mit einem reduzierenden M_z-invarianten Unterraum $\mathcal{M}_1$ und einem vollständig nicht reduzierenden M_z-invarianten Unterraum $\mathcal{M}_0$.

Annahme: $\mathcal{M}_1 \neq \{0\}$. Dann gibt es nach Satz 3.7 eine Borelmenge $B \subseteq \mathbb{T}$ mit $m(B) \neq 0$ und $\mathcal{M}_1 = \chi_B L^2(\mathbb{T})$. Wegen $\chi_B \in \mathcal{N}_f$ gibt es eine Folge $(p_n)_{n=0}^\infty$ von holomorphen Polynomen mit $\|fp_n - \chi_B\|_2 \to 0$ für $n \to \infty$. Wegen $1/f \in L^\infty(\mathbb{T})$ existiert dann auch der Grenzwert $\chi_B/f = \lim_{n\to\infty} p_n$ in $L^2(\mathbb{T})$. Insbesondere folgt $0 \neq \chi_B/f \in H^2(\mathbb{T})$ und daher nach Satz 3.12 $m(\mathbb{T} \setminus B) = 0$, d.h. $\chi_B = 1$. Es folgt $\mathcal{N}_f = L^2(\mathbb{T}) = \mathcal{M}_1$.

Sei nun p ein beliebiges holomorphes Polynom. Dann folgt mit Pythagoras

$$\|f - e_1 fp\|_2^2 = \int_{\mathbb{T}} |f|^2 |1 - zp(z)|^2\, dm(z) \geq \varepsilon^2 \|1 - e_1 p\|_2^2 = \varepsilon^2 \left(1 + \|e_1 p(z)\|_2^2\right) \geq \varepsilon^2.$$

Also ist $f \notin M_z(\mathcal{N}_f)$, d.h. $M_z(\mathcal{N}_f) \neq \mathcal{N}_f$ im Widerspruch dazu, daß $\mathcal{N}_z = \mathcal{M}_0$ reduzierender M_z-invarianter Unterraum von $L^2(\mathbb{T})$ ist. Da die Annahme zu einem Widerspruch geführt hat, muß $\mathcal{N}_f = \mathcal{M}_0$ gelten und $\mathcal{N}_f$ ein vollständig nicht reduzierender M_z-invarianter Unterraum von $L^2(\mathbb{T})$ sein. □

Wir geben noch einige Folgerungen für den Hardyraum H^1 an:

Folgerungen 3.23. *Für alle $f \in H^1(\mathbb{T})$ gilt:*

(a) *Es gibt eine Funktion $g \in H^2(\mathbb{T})$ mit $|f| = |g|^2$ m-fast überall.*

(b) *Es gibt Funktionen $g_1, g_2 \in H^2(\mathbb{T})$ mit $|g_1| = |g_2| = |f|^{\frac{1}{2}}$ und $f = g_1 g_2$ m-fast überall.*

Beweis. (a) Ist f eine m-Nullfunktion, so leistet $g \equiv 0$ das gewünschte. Sei nun $0 \neq f \in H^1(\mathbb{T})$. Dann ist $h := |f|^{\frac{1}{2}} \in L^2(\mathbb{T})$. Wir zeigen durch einen indirekten Beweis, daß $\mathcal{M} := \overline{h\mathbb{C}[Z]}^{\|\cdot\|_2}$ ein vollständig nicht reduzierender M_z-invarianter Unterraum in $L^2(\mathbb{T})$ ist:

Annahme: Dies ist nicht der Fall, d.h. es gilt (nach Satz 3.9) $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2$ mit einem vollständig nicht reduzierendem M_z-invarianten Unterraum $\mathcal{M}_2$ und mit

$$\mathcal{M}_1 := \bigcap_{n=1}^{\infty} M_z^n(\mathcal{M}) \neq \{0\}\,.$$

Dann ist $e_{-n}h = M_z^{-n}h \in \mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M} = \overline{h\mathbb{C}[Z]}^{\|\cdot\|_2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daher gibt es eine Folge $(p_k)_{k=1}^{\infty}$ von holomorphen Polynomen mit $\|p_k h - e_{-n}h\|_2 \to 0$ für $k \to \infty$. Wegen

$$\begin{aligned}|\||p_k h - e_{-n}h\|_2^2 &= \int_{\mathbb{T}} |h^2 e_{-2n} - h^2(2p_n e_{-n} - p_n^2)|\, dm = \int_{\mathbb{T}} |h^2 e_{-n} - h^2(2p_n - p_n^2 e_n)|\, dm \\ &= \|h^2 e_{-n} - h^2(2p_n - p_n^2 e_n)\|_1\end{aligned}$$

liegt $h^2 e_{-n}$ also in $\overline{h^2\mathbb{C}[Z]}^{\|\cdot\|_1}$. Wegen $|f| = h^2$ gibt es eine Funktion u mit $|u| = 1$ m-fast überall und $uh^2 = f$ m-fast überall. Es folgt daher für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$e_{-n}f = uh^2 e_n \in M_u\overline{h^2\mathbb{C}[Z]}^{\|\cdot\|_1} = \overline{uh^2\mathbb{C}[Z]}^{\|\cdot\|_1} = \overline{f\mathbb{C}[Z]}^{\|\cdot\|_1} \subseteq H^1(\mathbb{T})\,.$$

Dies ist nur möglich für $f \equiv 0$ im Widerspruch zu $0 \neq f \in H^1(\mathbb{T})$. Also ist $\mathcal{M}$ vollständig nicht reduzierend und nach Satz 3.21 gibt es eine äußere Funktion $g \in H^2(\mathbb{T})$ mit $|g| = h$ und also auch $|g|^2 = |f|$ m-fast überall.

(b) Ist f eine Nullfunktion, so ist die Behauptung trivial, im anderen Fall gibt es nach dem Beweis zu (a) eine äußere Funktion $g \in H^2(\mathbb{T})$ mit $|g|^2 = |f|$ m-fast überall und es ist $\overline{g\mathbb{C}[Z]} = H^2(\mathbb{T})$. Insbesondere gibt es dann eine Folge $(p_k)_{k=1}^{\infty}$ holomorpher Polynome mit $\|p_k g - 1\|_2 \to 0$ für $k \to \infty$. Wegen

$$\begin{aligned}\|fp_k^2 - fp_j^2\|_1 &\leq \|f(p_k - p_j)p_k\|_1 + \|f(p_k - p_j)p_j\|_1 \\ &\leq \|gp_k\|_2\|g(p_k - p_j)\|_2 + \|gp_j\|_2\|g(p_k - p_j)\|_2\end{aligned}$$

ist die Folge $(fp_k)_{k=1}^{\infty}$ also eine Cauchyfolge in $(H^1(\mathbb{T}), \|\cdot\|_1)$ und somit gegen eine Funktion $v \in H^1(\mathbb{T})$ konvergent. Indem wir notfalls zu einer Teilfolge übergehen, können wir daher annehmen, daß $fp_k(z)^2 \to v(z)$ und $g(z)p_k(z) \to 1$ für $k \to \infty$ für m-fast alle $z \in \mathbb{T}$ gilt. Es folgt $vg^2 = f$ und wegen $|g^2| = |f|$ auch $|v| = 1$ m-fast überall. v ist also eine innere Funktion und die Funktionen $g_1 := vg$, $g_2 := g$ sind in $H^2(\mathbb{T})$ mit $f = g_1 g_2$ und $|g_1| = |g_2| = |f|^{\frac{1}{2}}$ m-fast überall. □

Folgerung 3.24. *Die holomorphen Polynome liegen dicht in* $(H^1(\mathbb{T}), \|\cdot\|_1)$.

Beweis. Nach Folgerung 3.23 (b) gibt es $g_1, g_2 \in H^2(\mathbb{T})$ mit $g_1 g_2 = f$ m-fast überall. Da die holomorphen Polynome in $H^2(\mathbb{T})$ dicht liegen gibt es zwei Folgen $(p_k)_{k=1}^{\infty}$ und $(q_k)_{k=1}^{\infty}$ holomorpher Polynome mit $\|g_1 - p_k\|_2 \to 0$ und $\|g_2 - q_k\|_2 \to 0$ für $k \to \infty$. Dann ist auch $(p_k q_k)_{k=1}^{\infty}$ eine Folge holomorpher Polynome und es gilt

$$\|f - p_k q_k\|_1 \leq \|g_1 g_2 - g_1 q_k\|_1 + \|g_1 q_k - p_k q_k\|_1 \leq \|g_1\|_2\|g_2 - q_k\|_2 + \|g_1 - p_k\|_2\|q_k\|_2 \to 0$$

für $k \to \infty$. □

Die beiden folgenden Aussagen werden für das nachfolgende Kapitel über Toeplitzoperatoren bereitgestellt.

Satz 3.25. *Die Menge*

$$\mathcal{Q} := \{\overline{\theta} f \, ; \, f \in H^\infty(\mathbb{T}), \, \theta \text{ innere Funktion}\}$$

ist eine Algebra, welche in $L^\infty(\mathbb{T})$ dicht liegt.

Beweis. Seien θ_1, θ_2 innere Funktionen und $f_1, f_2 \in H^\infty(\mathbb{T})$. Dann ist auch $\theta_1\theta_2$ eine innere Funktion und $f_1 f_2$ sowie $\theta_2 f_1 + \theta_1 f_2$ sind in $H^\infty(\mathbb{T})$. Also folgt

$$(\overline{\theta_1} f_1)(\overline{\theta_2} f_2) = \overline{\theta_1\theta_2} f_1 f_2 \in \mathcal{Q}\,, \quad \overline{\theta_1} f_1 + \overline{\theta_2} f_2 = \overline{\theta_1\theta_2}(\theta_2 f_1 + \theta_1 f_2) \in \mathcal{Q}\,,$$

d.h. $\mathcal{Q}$ ist eine Unteralgebra von $L^\infty(\mathbb{T})$.

Um die Dichtheit von $\mathcal{Q}$ in $L^\infty(\mathbb{T})$ zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß der Abschluß von $\mathcal{Q}$ alle charakteristischen Funktionen von Borelmengen in $\mathbb{T}$ enthält. Sei also $B \subseteq \mathbb{T}$ eine Borelmenge. Nach Satz 3.22 gibt es eine Funktion $f \in H^2(\mathbb{T})$ mit

$$|f(z)| = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } z \in B \\ 2 & \text{für } z \in \mathbb{T} \setminus B\,. \end{cases}$$

Da f auf $\mathbb{T}$ beschränkt ist, folgt $f \in H^\infty(\mathbb{T})$ und somit auch $1 + f^n \in H^\infty(\mathbb{T})$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach dem Faktorisierungssatz 3.18 gibt es also innere Funktionen θ_n und äußere Funktionen $g_n \in H^\infty(\mathbb{T})$ mit

$$1 + f^n = \theta_n g_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}\,.$$

Wegen $|g_n| = |1+f^n| \geq 1-|f|^n \geq \frac{1}{2}$ sind alle g_n in $L^\infty(\mathbb{T})$ invertierbar, also nach Satz 3.17 auch in $H^\infty(\mathbb{T})$ invertierbar und wir erhalten

$$\frac{1}{1+f^n} = \overline{\theta_n} \cdot \frac{1}{g_n} \in \mathcal{Q}.$$

Wegen

$$\left\| \frac{1}{1+f^n} - \chi_B \right\|_\infty \to 0 \quad \text{für } n \to \infty$$

folgt daher $\chi_B \in \overline{\mathcal{Q}}^{\|\cdot\|_\infty}$. □

Lemma 3.26. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen und $F \in \mathcal{O}(\Omega \times \mathbb{D})$. Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet mit $\overline{G}^{\mathbb{C}} \subset \Omega$ und gibt es eine auf ∂G stetige $H^2(\mathbb{T})$-wertige Funktion $\lambda \mapsto f_\lambda$ mit $\widehat{f_\lambda}(z) = F(\lambda, z)$ für alle $\lambda \in \partial G$ und alle $z \in \mathbb{D}$, so gibt es eine auf ganz G holomorphe $H^2(\mathbb{T})$–wertige Funktion $\lambda \mapsto f_\lambda$ mit $\widehat{f_\lambda}(z) = F(\lambda, z)$ für alle $\lambda \in G$, $z \in \mathbb{D}$ und es gilt $\|f_\lambda\|_2 \leq \sup_{\mu \in \partial G} \|f_\mu\|_2$ für alle $\lambda \in G$.*

Beweis. Wegen der Holomorphie von F auf $G \times \mathbb{D}$ ist für alle $k \in \mathbb{N}_0$ die komplexwertige Funktion

$$a_k : G \to \mathbb{C}, \qquad \mu \mapsto a_k(\mu) := \frac{1}{k!}\frac{\partial^k F}{\partial z^k}(\mu, 0),$$

auf Ω holomorph und es gilt für alle $z \in \mathbb{D}$

$$F(\mu, z) = \sum_{n=0}^\infty a_n(z) z^n.$$

Nach Voraussetzung gilt weiter

$$\forall \lambda \in \partial G : \qquad f_\lambda = \sum_{n=0}^\infty a_n(\lambda) e_n$$

Sei nun $h = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{h}_n e_n \in H^2(\mathbb{T})$ beliebig und $N \in \mathbb{N}$. Dann ist die komplexwertige Funktion

$$\mu \mapsto \Big\langle \sum_{n=0}^{N} a_n(\mu) e_n, h \Big\rangle = \sum_{n=0}^{N} a_n(\mu) \overline{\hat{h}_n}$$

auf Ω holomorph und nach der globalen Fassung des Maximumprinzips gilt

$$\begin{aligned} \sup_{\mu\in G} \Big| \Big\langle \sum_{n=0}^{N} a_n(\mu) e_n, h \Big\rangle \Big| &\le \max_{\lambda\in\partial G} \Big| \Big\langle \sum_{n=0}^{N} a_n(\lambda) e_n, h \Big\rangle \Big| \\ &\le \max_{\lambda\in\partial G} \Big\| \sum_{n=0}^{N} a_n(\lambda) e_n \Big\|_2 \|h\|_2 \le \max_{\lambda\in\partial G} \|f_\lambda\|_2 \|h\|_2 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Also folgt für alle $N \in \mathbb{N}$:

$$\max_{\lambda\in\partial G} \Big(\sum_{n=0}^{N} |a_n(\lambda)|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \le \max_{\lambda\in\partial G} \|f_\lambda\|_2$$

und damit $f_\lambda := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda) e_n \in H^2(\mathbb{T})$ für alle $\lambda \in G$ sowie $\|f_\lambda\|_2 \le \sup_{\mu\in\partial G} \|f_\mu\|_2$ für alle $\lambda \in G$. Insbesondere gilt $\widehat{f_\mu}(z) = F(\mu, z)$ für alle $\mu \in G$, $z \in \mathbb{D}$. Für alle $\mu \in G$, $h \in H^2(\mathbb{T})$ gilt ferner

$$\Big\langle \sum_{n=0}^{N} a_n(\mu) e_n, h \Big\rangle \to \langle f_\mu, h \rangle \quad \text{für } n \to \infty.$$

Da die Folge der Funktionen $\mu \mapsto \Big\langle \sum_{n=0}^{N} a_n(\mu) e_n, h \Big\rangle$ wegen (3.7) auf G gleichmäßig beschränkt ist, folgt nach einer Folgerung aus dem Satz von Montel (siehe z.B. Aufgabe 4.9 in [**2**]) die Holomorphie von $\mu \mapsto \langle f_\mu, h \rangle$ auf G. Da jede schwach holomorphe Funktion auch stark holomorph ist (siehe z.B. [**3**], Satz 20.7), folgt die Holomorphie der $H^2(\mathbb{T})$–wertigen Funktion $\mu \mapsto f_\mu$ auf G. □

3.5. Dualitätsaussagen

Wir verwenden die Tatsache daß durch die Abbildung $\Phi : L^\infty(\mathbb{T}) \to L^1(\mathbb{T})'$, $f \mapsto \Phi(f)$, mit

$$\Phi(f)(g) := \int_{\mathbb{T}} f(z) g(z)\, d\mu(z) \qquad (f \in L^\infty(\mathbb{T}), g \in L^1(\mathbb{T}))$$

ein isometrischer Isomorphismus von $L^\infty(\mathbb{T})$ auf $L^1(\mathbb{T})'$ gegeben ist. Die Dualräume zu den abgeschlossenen Unterräumen $H^1(\mathbb{T})$ und $H^1_0(\mathbb{T})$ sind somit isometrisch isomorph zu $L^\infty(\mathbb{T})/\Phi^{-1}(H^1(\mathbb{T})^\circ)$ und $L^\infty(\mathbb{T})/\Phi^{-1}(H^1_0(\mathbb{T})^\circ)$. Dies können wir noch präzisieren:

Satz 3.27. *Der topologische Dualraum von $H^1(\mathbb{T})$ (bzw. $H^1_0(\mathbb{T})$) ist in kanonischer Weise isometrisch isomorph zu $L^\infty(\mathbb{T})/H^\infty_0(\mathbb{T})$ (bzw. zu $L^\infty(\mathbb{T})/H^\infty(\mathbb{T})$).*

Beweis. Zu zeigen ist also

$$H^\infty_0(\mathbb{T}) = \Phi^{-1}(H^1(\mathbb{T})^\circ) = \Big\{ h \in L^\infty(\mathbb{T})\, ; \forall f \in H^1(\mathbb{T}) : \int_{\mathbb{T}} f(z) h(z)\, dm(z) = 0 \Big\} \tag{3.8}$$

bzw.

$$H^\infty(\mathbb{T}) = \Phi^{-1}(H^1_0(\mathbb{T})^\circ) = \Big\{ h \in L^\infty(\mathbb{T})\, ; \forall f \in H^1_0(\mathbb{T}) : \int_{\mathbb{T}} f(z) h(z)\, dm(z) = 0 \Big\}$$

Wegen $H^1_0(\mathbb{T}) = e_1 H^1(\mathbb{T})$ und $H^\infty_0(\mathbb{T}) = e_1 H^\infty(\mathbb{T})$ genügt es, die erste Aussage zu beweisen.

Ist $h \in \Phi^{-1}(H^1(\mathbb{T})^\circ)$, so gilt insbesondere

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \qquad \int_{\mathbb{T}} h(z) z^n \, dm(z) = 0 \tag{3.9}$$

und somit $\hat{h}_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, d.h. $h \in H_0^\infty(\mathbb{T})$.

Ist umgekehrt $h \in H_0^\infty(\mathbb{T})$, so folgt (3.9) und daher

$$\int_{\mathbb{T}} h(z) p(z) \, dm(z) = 0$$

für alle holomorphen Polynome p. Da diese nach Folgerung 3.24 in $H^1(\mathbb{T})$ dicht liegen und die Linearform $f \mapsto \int_{\mathbb{T}} h(z) f(z) \, dm(z)$ stetig bezüglich der Norm $\| \cdot \|_1$ ist, folgt $\int_{\mathbb{T}} h(z) f(z) \, dm(z) = 0$ für alle $f \in H^1(\mathbb{T})$. Damit ist (3.8) bewiesen. $\square$

Die Menge

$$\mathcal{A}(\mathbb{T}) := \{ f \in C(\mathbb{T}) \, ; \, \forall n \in \mathbb{N} : \quad \hat{f}_{-n} = 0 \}$$

ist eine bezüglich der Norm $\| \cdot \|_\infty$ abgeschlossene Unteralgebra von $H^\infty(\mathbb{T})$ und von $C(\mathbb{T})$.

In den Übungen wird gezeigt, daß $L^1(\mathbb{T})$ nicht isometrisch isomorph zum Dualraum eines Banachraums sein kann. Für den abgeschlossenen Unterraum $H_0^1(\mathbb{T})$ von $L^1(\mathbb{T})$ gilt dies nicht.

Satz 3.28. *Der topologische Dualraum von $C(\mathbb{T})/\mathcal{A}(\mathbb{T})$ ist in kanonischer Weise isometrisch isomorph zu $H_0^1(\mathbb{T})$.*

Beweis. Für alle $h \in H_0^1(\mathbb{T})$ ist das durch

$$\phi_h(f) := \int_{\mathbb{T}} f(z) h(z) \, dm(z) \qquad (f \in C(\mathbb{T}))$$

definierte lineare Funktional $\phi_h : C(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$ stetig mit $\phi_h(f) = 0$ für alle $f \in \mathcal{A}(\mathbb{T})$. Durch

$$\Phi_h(f + \mathcal{A}(\mathbb{T})) := \int_{\mathbb{T}} f(z) h(z) \, dm(z) \qquad (f + \mathcal{A}(\mathbb{T}) \in C(\mathbb{T})/\mathcal{A}(\mathbb{T}))$$

ist also ein wohldefiniertes stetiges lineares Funktional auf $C(\mathbb{T})/\mathcal{A}(\mathbb{T})$ gegeben mit $\|\Phi_h\| \leq \|h\|_1$. Ist umgekehrt φ ein stetiges lineares Funktional auf $C(\mathbb{T})/\mathcal{A}(\mathbb{T})$ und bezeichnet $\pi : C(\mathbb{T}) \to C(\mathbb{T})/\mathcal{A}(\mathbb{T})$ den kanonischen Epimorphismus, so ist $\varphi \circ \pi \in C(\mathbb{T})'$. Nach dem Rieszschen Darstellungssatz (siehe z.B. [**3**], Satz 19.30) gibt es also ein $\mu \in \mathrm{rca}(\mathbb{T})$ mit $\|\varphi \circ \pi\| = \|\mu\|$ und $\varphi(f + \mathcal{A}(\mathbb{T})) = (\varphi \circ \pi)(f) = \int_{\mathbb{T}} f(z) \, d\mu(z)$ für alle $f \in C(\mathbb{T})$. Insbesondere folgt $\int_{\mathbb{T}} z^n \, d\mu(z) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Nach dem Satz von F. und M. Riesz 3.13 gibt es daher eine Funktion $h \in H^1(\mathbb{T})$ mit $d\mu = h \, dm$. Insbesondere ist $\|\varphi\| \geq \|\varphi \circ \pi\| = \|\mu\| = \|h\|_1$ und

$$\varphi(f + \mathcal{A}(\mathbb{T})) = \int_{\mathbb{T}} f(z) h(z) \, dm(z)$$

für alle $f + \mathcal{A}(\mathbb{T}) \in C(\mathbb{T})/\mathcal{A}(\mathbb{T})$. Wegen $e_0 \in \mathcal{A}(\mathbb{T})$ folgt

$$0 = \varphi(e_0 + \mathcal{A}(\mathbb{T})) = \int_{\mathbb{T}} e_0(z) h(z) \, dm(z) = \hat{h}_0$$

und damit $h \in H_0^1(\mathbb{T})$. Die Abbildung $h \mapsto \Phi_h$ ist also ein isometrischer Isomorphismus von $H_0^1(\mathbb{T})$ auf $(C(\mathbb{T})/\mathcal{A}(\mathbb{T}))'$. $\square$

Da wir den Dualraum von $H_0^1(\mathbb{T})$ schon kennen erhalten wir unmittelbar:

Folgerung 3.29. *$(C(\mathbb{T})/\mathcal{A}(\mathbb{T}))''$ ist kanonisch isometrisch isomorph zu $L^\infty(\mathbb{T})/H^\infty(\mathbb{T})$. Der kanonischen isometrischen Einbettung von $C(\mathbb{T})/\mathcal{A}(\mathbb{T})$ in seinen Bidualraum entspricht hierbei die kanonische Einbettung $J : C(\mathbb{T})/\mathcal{A}(\mathbb{T}) \to L^\infty(\mathbb{T})/H^\infty(\mathbb{T})$, $f + \mathcal{A}(\mathbb{T}) \mapsto f + H^\infty(\mathbb{T})$.*

Insbesondere ist also $\operatorname{ran}(J) = (C(\mathbb{T}) + H^\infty(\mathbb{T}))/H^\infty(\mathbb{T})$ ein abgeschlossener Unterraum von $L^\infty(\mathbb{T})/H^\infty(\mathbb{T})$. Daher gilt:

Folgerung 3.30. *$C(\mathbb{T})+H^\infty(\mathbb{T})$ ist ein abgeschlossener Untervektorraum von $L^\infty(\mathbb{T})$.*

Auch $H^\infty(\mathbb{T})$ ist ein dualer Banachraum (siehe Aufgabe 3.15).

3.6. Douglas-Algebren

In diesem Abschnitt geht es um abgeschlossene Unteralgebren $\mathfrak{A}$ von $L^\infty(\mathbb{T})$, die $H^\infty(\mathbb{T})$ enthalten.

Die Menge $\mathcal{S}_i(\mathbb{T})$ aller inneren Funktionen aus $H^\infty(\mathbb{T})$ ist - versehen mit der Multiplikation als Verknüpfung eine Halbgruppe mit Einselement $e_0 \equiv 1$. Ist $\mathcal{S}$ eine Unterhalbgruppe von $\mathcal{S}_i(\mathbb{T})$, so sind Produkte von Funktionen aus

$$\mathcal{D}_0(\mathcal{S}) := \{h/u\,;\, h \in H^\infty(\mathbb{T})\,, u \in \mathcal{S}\} = \{h\overline{u}\,;\, h \in H^\infty(\mathbb{T})\,, u \in \mathcal{S}\}$$

offensichtlich offensichtlich wieder Elemente von $\mathcal{D}_0(\mathcal{S})$. $\mathcal{D}_0(\mathcal{S})$ ist auch eine Unteralgebra von $L^\infty(\mathbb{T})$, denn für alle $h_1, h_2 \in H^\infty(\mathbb{T})$, $u_1, u_2 \in \mathcal{S}$ ist $h_1u_2 + h_2u_1 \in H^\infty(\mathbb{T})$, $u_1u_2 \in \mathcal{S}$ und somit

$$\frac{h_1}{u_1} + \frac{h_2}{u_2} = \frac{h_1u_2 + h_2u_1}{u_1u_2} \in \mathcal{D}_0(\mathcal{S}).$$

Wir nennen $\mathcal{D}(\mathcal{S}) := \overline{\mathcal{D}_0(\mathcal{S})}^{\|\cdot\|_\infty}$ die zu $\mathcal{S}$ gehörige *Douglas-Algebra*. Dies ist offensichtlich die kleinste abgeschlossene Unteralgebra von $L^\infty(\mathbb{T})$, die $H^\infty(\mathbb{T})$ und $\{\overline{u}\,;\, u \in \mathcal{S}\}$ enthält. Der Satz von Chang und Marschall besagt, daß jede abgeschlossene $H^\infty(\mathbb{T})$ enthaltende Unteralgebra von $L^\infty(\mathbb{T})$ von dieser Gestalt ist[3].

Nach Satz 3.25 stimmt $L^\infty(\mathbb{T})$ mit $\mathcal{D}(\mathcal{S}_i(\mathbb{T}))$ überein und ist damit die größtmögliche Douglas-Algebra. Für $\mathcal{S}_0 := \{1\}$ findet man $\mathcal{D}(\mathcal{S}_0) = H^\infty(\mathbb{T})$. Für $\mathcal{S}_e := \{e_n\,;\, n \in \mathbb{N}_0\}$ erhält man:

Satz 3.31. *$\mathcal{D}(\mathcal{S}_e) = H^\infty(\mathbb{T}) + C(\mathbb{T})$. Insbesondere ist $H^\infty(\mathbb{T}) + C(\mathbb{T})$ eine Banachalgebra.*

Beweis. Ist $f = h/e_n \in \mathcal{D}_0(\mathcal{S}_e)$ beliebig mit $h \in H^\infty(\mathbb{T})$, $n \in \mathbb{N}_0$, so folgt $f = h_1 + g$ mit

$$h_1 := e_{-n}\Big(h - \sum_{k=0}^{n} \hat{h}_k e_k\Big) \in H^\infty(\mathbb{T})\,, \qquad g := \sum_{k=0}^{n} \hat{h}_k e_{k-n} \in C(\mathbb{T})\,.$$

Da $H^\infty(\mathbb{T})+C(\mathbb{T})$ nach Folgerung 3.30 abgeschlossen ist in $L^\infty(\mathbb{T})$, folgt $\mathcal{D}(\mathcal{S}_e) \subseteq H^\infty(\mathbb{T})+C(\mathbb{T})$. Wegen $H^\infty(\mathbb{T}) \cup \{e_k\,;\, k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathcal{D}(\mathbb{T})$ ist umgekehrt für alle $h \in H^\infty(\mathbb{T})$ und alle trigonometrischen Polynome $g = \sum_{k=n}^{m} a_k e_k$ die Funktion $h+g$ ein Element von $\mathcal{D}(\mathcal{S}_e)$. Da die trigonometrischen Polynome nach dem Approximationssatz von Weierstraß in $C(\mathbb{T})$ dicht liegen, folgt $H^\infty(\mathbb{T}) + C(\mathbb{T}) \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{S}_e)$ und damit insgesamt die Behauptung. $\square$

Wir wollen den Raum $\Delta(H^\infty(\mathbb{T})+C(\mathbb{T}))$ der multiplikativen linearen Funktionale von $H^\infty(\mathbb{T})+C(\mathbb{T})$ näher beschreiben. Zunächst zeigen wir, daß die Räume der multiplikativen linearen Funktionale abgeschlossener Unteralgebren von $L^\infty(\mathbb{T})$, die $H^\infty(\mathbb{T})$ enthalten, kanonisch homöomorph zu einer abgeschlossenen Teilmenge von $\Delta(H^\infty(\mathbb{T}))$ ist.

[3]Eine Herleitung dieses bemerkenswerten Theorems ist aus Zeitgründen im Rahmen dieser Vorlesung leider nicht möglich. Eine ausführliche Darstellung findet man z.B. im Kapitel IX des Buches [**24**] von Garnett.

Satz 3.32. *Sei $\mathfrak{A}$ eine abgeschlossene Unteralgebra von $L^\infty(\mathbb{T})$, die $H^\infty(\mathbb{T})$ enthält. Dann wird durch*

$$\rho : \Delta(\mathfrak{A}) \to \Delta(H^\infty(\mathbb{T}))\,, \phi \mapsto \rho(\phi) := \phi|_{H^\infty(\mathbb{T})}\,,$$

eine Homöomorphie von $\Delta(\mathfrak{A})$ auf eine kompakte Teilmenge von $\Delta(H^\infty(\mathbb{T}))$ definiert.

Beweis. Die Stetigkeit von ρ ist unmittelbar klar. Insbesondere ist $\rho(\Delta(\mathfrak{A}))$ eine kompakte Teilmenge von $\Delta(H^\infty(\mathbb{T}))$. Sei nun $\phi \in \rho(\Delta(\mathfrak{A}))$ beliebig und seien $\Psi_1, \Psi_2 \in \Delta(\mathfrak{A})$ mit $\Psi_j|_{H^\infty(\mathbb{T})} = \phi$ für $j = 1, 2$. Dann gibt es nach dem Satz von Hahn-Banach stetige lineare Fortsetzungen $L_j \in L^\infty(\mathbb{T})'$ von Ψ_j mit $\|L_j\| = \|\Psi_j\| = 1 = \Psi_j(1) = L_j(1)$, $j = 1, 2$. Insbesondere sind L_1, L_2 positive lineare Funktionale (nach Aufgabe 3.16). Da beide auch Fortsetzungen von ϕ sind, folgt mit Aufgabe 3.18 schon $L_1 = L_2$ und somit auch $\Psi_1 = \Psi_2$. □

Folgerung 3.33. *Ist $\mathfrak{A}$ eine $H^\infty(\mathbb{T})$ enthaltende aber von von $H^\infty(\mathbb{T})$ verschiedene, abgeschlossene Unteralgebra von $L^\infty(\mathbb{T})$. Dann gilt schon $H^\infty(\mathbb{T}) + C(\mathbb{T}) \subseteq \mathfrak{A}$ und*

$$\rho(\Delta(\mathfrak{A})) \subseteq \Delta(H^\infty(\mathbb{T})) \setminus \mathbb{D}$$

mit der Identifikation von $\mathbb{D}$ mit $\{\mathcal{E}_w\,;\, w \in \mathbb{D}\}$ und ρ wie in Satz 3.32.

Beweis. Nach Satz 3.32 können wir $\Delta(\mathfrak{A})$ per Restriktion identifizieren mit der abgeschlossenen Teilmenge $\rho(\Delta(\mathfrak{A}))$ von $\Delta(H^\infty(\mathbb{T}))$. Zwei Fälle sind denkbar :

Fall 1: $\mathcal{E}_0 \notin \rho(\Delta(\mathfrak{A}))$. Dann folgt insbesondere $\phi(e_1) \neq 0$ für alle $\phi \in \Delta(\mathfrak{A})$ und somit die Invertierbarkeit von e_1 in $\mathfrak{A}$, d.h. $e_1^{-1} = e_{-1} \in \mathfrak{A}$ und somit $e_n \in \mathfrak{A}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Also ist $C(\mathbb{T}) = \overline{\mathrm{LH}\{e_n\,;\, n \in \mathbb{Z}\}}^{\|\cdot\|_\infty} \subseteq \mathfrak{A}$ und daher auch $H^\infty(\mathbb{T}) + C(\mathbb{T}) \subseteq \mathfrak{A}$.

Fall 2: $\mathcal{E}_0 \in \rho(\Delta(\mathfrak{A}))$. Die nach Aufgabe 3.18 eindeutig bestimmte Fortsetzung $\mathcal{E}_0$ zu einem positiven linearen Funktional auf $L^\infty(\mathbb{T})$ ist (nach Definition von $\mathcal{E}_0$) gegeben durch

$$L_0(f) := \int_{\mathbb{T}} f(\zeta)\, d\zeta \qquad (f \in L^\infty(\mathbb{T}))$$

und muß auf $\mathfrak{A}$ multiplikativ sein. Ist nun $f \in \mathfrak{A} \setminus H^\infty(\mathbb{T})$, so ist $\hat{f}_{-n} \neq 0$ für wenigstens ein $n \in \mathbb{N}$ und wir erhalten den Widerspruch

$$0 \neq \int_{\mathbb{T}} f(\zeta)\zeta^n\, d\zeta = L_0(f \cdot e_n) = L_0(f)L_0(e_n) = L_0(f)\mathcal{E}_0(e_n) = 0.$$

Dieser Fall kann also nicht eintreten. Somit gilt $H^\infty(\mathbb{T}) + C(\mathbb{T}) \subseteq \mathfrak{A}$.

Sei nun $w \in \mathbb{D}$ beliebig. Wir machen die Annahme: $\mathcal{E}_w \in \rho(\Delta(\mathfrak{A}))$. Sei ϕ_w das nach Satz 3.32 eindeutig bestimmte multiplikative Funktional auf $\mathfrak{A}$ mit $\phi_w|_{H^\infty(\mathbb{T})} = \mathcal{E}_w$. Wegen $C(\mathbb{T}) \subset \mathfrak{A}$ ist $(w - e_1)^{-1} \in \mathfrak{A}$. Nach Gleichung (3.5) ist das lineare Funktional $f \mapsto P(f, w)$ die nach Aufgabe 3.18 eindeutig bestimmte Fortsetzung zu einem positiven linearen Funktional auf $L^\infty(\mathbb{T})$. Insbesondere gilt $P(f, w) = \phi_w(f)$ für alle $f \in \mathfrak{A}$. Sei nun $f \in \mathfrak{A} \setminus \ker \phi_w$. Die Funktion $(w - e_1)^{-1} : z \mapsto 1/(w - z)$ ist stetig auf $\mathbb{T}$ also in $\mathfrak{A}$. Es folgt $(w - e_1)^{-1} f \in \mathfrak{A}$ und

$$\phi_w(f) = \phi_w((w - e_1)(w - e_1)^{-1} f) = \phi_w(w - e_1)\phi_w((w - e_1)^{-1} f) = 0$$

im Widerspruch zu $\phi_w(f) \neq 0$. Die Annahme war also falsch und es folgt $\rho(\Delta(\mathfrak{A})) \cap \{\mathcal{E}_w\,;\, w \in \mathbb{D}\} = \emptyset$. □

Wir zeigen nun, daß die Poissontransformierte auf Funktionen aus $H^\infty(\mathbb{T}) + C(\mathbb{T})$ bei Annäherung an den Rand von $\mathbb{D}$ asymptotisch multiplikativ ist. Wir erinnern daran, daß für alle $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ gilt $\|P(f, \cdot)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ und

$$P(f, re^{i\varphi}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n r^{|n|} e^{in\varphi}\,.$$

Ist $f \in L^\infty(\mathbb{T})$, $z \in \mathbb{D}$, so schreiben wir statt $P(f,z)$ auch kurz $\hat{f}(z)$.

Lemma 3.34. *Für alle $f, g \in H^\infty(\mathbb{T}) + C(\mathbb{T})$ und für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so daß für alle $z \in \mathbb{D}$ mit $1 - |z| < \delta$ gilt*

$$|\hat{f}(z)\hat{g}(z) - \widehat{fg}(z)| < \varepsilon.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst:

(a) *Für alle $u \in H^\infty(\mathbb{T})$, alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so daß für alle $z \in \mathbb{D}$ mit $1 - |z| < \delta$ gilt $|\widehat{e_{-n}u}(z) - \widehat{e_{-n}}(z)\hat{u}(z)| < \varepsilon$.*

Unter Verwendung der obigen Darstellung der Poisson-Transformierten sieht man für alle $z = re^{i\varphi} \in \mathbb{D}$:

$$|\widehat{e_{-n}u}(z) - \widehat{e_{-n}}(z)\hat{u}(z)| \le \sum_{k=0}^{n} |r^{n-k} - r^{n+k}|\hat{u}_k + (r^{-n} - r^n)\Big\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \hat{u}_k e_k \Big\|_\infty \to 0 \quad \text{für } r \to 1.$$

(b) Wir kommen nun zum eigentlichen Beweis des Lemmas. Da $\mathcal{D}_0(\mathcal{S}_e)$ in $\mathcal{D}(\mathcal{S}_e) = H^\infty(\mathbb{T}) + C(\mathbb{T})$ dicht liegt, genügt es, die Behauptung für alle Funktionen der Gestalt $\overline{e_n}u = e_{-n}u$ mit $n \in \mathbb{N}_0$, $u \in H^\infty(\mathbb{T})$ zu beweisen. Seien also $n, m \in \mathbb{N}_0$ und $u, v \in H^\infty(\mathbb{T})$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned}
|\widehat{e_{-n}u}(z)\widehat{e_{-m}v}(z) - \widehat{e_{-n-m}uv}(z)| \le\ & \big|\big(\widehat{e_{-n}u}(z) - \widehat{e_{-n}}(z)\hat{u}(z)\big)\widehat{e_{-m}v}(z)\big| \\
&+ \big|\widehat{e_{-n}}(z)\hat{u}(z)\left(\widehat{e_{-m}v}(z) - \widehat{e_{-m}}(z)\hat{v}(z)\right)\big| \\
&+ \big|\widehat{e_{-n-m}}(z)\widehat{uv}(z) - \widehat{e_{-n-m}uv}(z)\big|
\end{aligned}$$

Zu den drei Summanden auf der rechten Seite gibt es nach (a) ein $\delta > 0$, so daß jeder von ihnen für $1 - |z| < \delta$ kleiner wird als $\varepsilon/3$. Damit folgt die Behauptung. $\square$

Abschließend charakterisieren wir die invertierbaren Elemente der Douglas-Algebra $H^\infty(\mathbb{T}) + C(\mathbb{T})$.

Satz 3.35. *Eine Funktion $f \in H^\infty(\mathbb{T}) + C(\mathbb{T})$ ist genau dann invertierbar in der Douglas-Algebra $H^\infty(\mathbb{T}) + C(\mathbb{T})$, wenn es positive Zahlen δ, ε gibt, so daß für alle $z \in \mathbb{D}$ mit $1 - |z| < \delta$ gilt $|\hat{f}(z)| \ge \varepsilon$.*

Beweis. "$\Longrightarrow$": Ist f in $H^\infty(\mathbb{T}) + C(\mathbb{T})$ invertierbar, so gibt es nach Lemma 3.34 ein $\delta > 0$, so daß für alle $z \in \mathbb{D}$ mit $1 - |z| < \delta$ gilt:

$$1 - \left|\hat{f}(z)\widehat{f^{-1}}(z)\right| \le \left|1 - \hat{f}(z)\widehat{f^{-1}}(z)\right| < \frac{1}{2}.$$

Es folgt also für alle solche z:

$$\frac{1}{2} < \left|\hat{f}(z)\widehat{f^{-1}}(z)\right| \le |\hat{f}(z)| \cdot \|f^{-1}\|_\infty$$

und somit

$$\varepsilon := \frac{\|f^{-1}\|_\infty}{2} < |\hat{f}(z)|.$$

"$\Longleftarrow$": Sei nun $f \in H^\infty(\mathbb{T}) + C(\mathbb{T})$ und seien $\varepsilon, \delta > 0$ so daß

$$|\hat{f}(z)| \ge \varepsilon \quad \text{für alle } z \in \mathbb{D} \text{ mit } 1 - |z| < \delta.$$

Dann gibt es eine Funktion $u \in H^\infty(\mathbb{T})$ und ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $\|f - e_{-n}u\|_\infty < \varepsilon/3$. Nach Lemma 3.34 gibt es ein $\delta_1 \in (0, \delta)$, so daß für alle $z = re^{i\varphi} \in \mathbb{D}$ mit $1 - |z| = 1 - r < \delta_1$ gilt

$$|\widehat{e_{-n}u}(z) - \widehat{e_{-n}}(z)\hat{u}(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

und somit

$$|\hat{f}(z)-r^n e^{-in\varphi}\hat{u}(z)| \le |\hat{f}(z)-\widehat{e_{-n}u}(z)|+|\widehat{e_{-n}u}(z)-\widehat{e_{-n}}(z)\hat{u}(z)| \le \|f-e_{-n}u\|_\infty+\frac{\varepsilon}{3} < \frac{2}{3}\varepsilon.$$

Also gibt es ein $\delta_2 \in (0,\delta_1)$ mit $|\hat{u}(z)| < \varepsilon/3$ für alle $z \in \mathbb{D}$ mit $1-|z| < \delta_2$. Da $\hat{u}$ auf $\mathbb{D}$ holomorph ist, kann diese Funktion nur endlich viele Nullstellen $w_1,\dots,w_N$ (entsprechend ihrer Vielfachheit aufgeführt) haben. Durch mehrfaches Anwenden von Aufgabe 3.19 folgt mit $p(z) := \prod_{j=1}^N (z-w_j)$: Die Funktion v mit $v(z) := u(z)/p(z)$, $z \in \mathbb{T}$, ist in $H^\infty(\mathbb{T})$, und hat wegen $\hat{u} = \hat{p}\hat{v}$ keine Nullstellen in $\mathbb{D}$. Insbesondere folgt $\inf_{z\in\mathbb{D}} |\hat{v}(z)| > 0$, da $\hat{v}$ in der Nähe des Randes von $\mathbb{D}$ von 0 weg beschränkt ist. Nach Satz 3.16 ist v in $H^\infty(\mathbb{T})$ invertierbar. Da auch p in $C(\mathbb{T})$ invertierbar ist folgt die Invertierbarkeit von $u = pv$ und somit auch die Invertierbarkeit von $e_{-n}u$ in $H^\infty(\mathbb{T}) + C(\mathbb{T})$.

Mit $f_r(z) := \hat{f}(rz)$ für alle $z \in \mathbb{T}$ gilt $\lim_{r\to 1^-} f_r = f$ in $L^2(\mathbb{T})$ (nach Aufgabe 3.5) und es folgt $|f(z)| \ge \varepsilon$ m-fast überall auf $\mathbb{T}$ und somit wegen

$$|f(z)| - |e_{-n}(z)u(z)| \le \|f-e_{-n}u\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$$

m-fast überall auf $\mathbb{T}$ die untere Abschätzung $|(e_{-n}u)(z)| \ge \frac{2}{3}\varepsilon$. Also hat man

$$\|(e_{-n}u)^{-1}\|_\infty \le \frac{3}{2\varepsilon} \quad \text{und somit } \|f-e_{-n}u\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3} < \frac{2}{3}\varepsilon \le \|(e_{-n}u)^{-1}\|_\infty^{-1}$$

Mit dem Beweis des aus der Funktionalanalysis bekannten Satz über die Offenheit der Menge G der invertierbaren Elemente einer Banachalgebra (siehe z.B. Satz 7.7 in [**3**]) folgt die Invertierbarkeit von f in $H^\infty(\mathbb{T}) + C(\mathbb{T})$. □

Übungsaufgaben zu Kapitel 3

Aufgabe 3.1. Sei $(X, \|\cdot\|)$ einer der Banachräume $(C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\mathbb{T})$, $(L^p(\mathbb{T}), \|\cdot\|_p)$ mit $1 \le p < \infty$. Für alle $w \in \mathbb{T}$ definieren wir eine Abbildung T_w durch

$$(T_w f)(z) := f(z/w) = f(z\overline{w}) \qquad (f \in X,\ z \in \mathbb{T}).$$

Zeigen Sie:

(a) Für alle $w \in \mathbb{T}$ ist T_w eine lineare Isometrie von X auf sich.

(b) Für alle $f \in X$ ist durch

$$F(w) := T_w f \qquad (w \in \mathbb{T})$$

eine auf $\mathbb{T}$ stetige X–wertige Funktion gegeben.

Aufgabe 3.2. Für alle $z \in \mathbb{D}$ definieren wir

$$P(w) := \mathrm{Re}\Big(\frac{1+z}{1-z}\Big).$$

Zeigen Sie:

(a) Für $0 \le r < 1$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$P(re^{it}) = 1 + 2\sum_{n=1}^\infty r^n \cos(nt) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t)+r^2}.$$

(b) Es ist $P > 0$ auf $\mathbb{D}$ und $\int_\mathbb{T} P(rz)\,dm(z) = 1$ für alle $r \in [0,1)$.

(c) Für alle $\delta \in (0,\pi)$ gilt mit $S_\delta := \{e^{it}\,;\ t \in [-\pi,\pi], |t| \ge \delta\}$:

$$\lim_{r\to 1^-} \int_{S_\delta} P(rz)\,dm(z) = 0.$$

AUFGABE 3.3. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und $F : \mathbb{T} \to X$ eine auf $\mathbb{T}$ stetige X–wertige Funktion. Zeigen Sie:

$$\lim_{r\to 1^-} \int_{\mathbb{T}} P(rz)F(z)\, dm(z) = F(1).$$

AUFGABE 3.4. Zeigen Sie: Mit den Bezeichnungen der vorherigen Aufgaben gilt für alle $f \in L^1(\mathbb{T})$:

(a) Die durch

$$P(f,z) := \int_{\mathbb{T}} P(z/\zeta) f(\zeta)\, dm(\zeta) \qquad (z \in \mathbb{D})$$

definierte Funktion $P(f,\cdot)$ ist auf $\mathbb{D}$ harmonisch.

(b) Für alle $r \in [0,1)$, $t \in [-\pi,\pi]$ gilt

$$P(f, re^{it}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n r^{|n|} e^{int}.$$

Hierbei sei $\hat{f}_n$ der n-te Fourierkoeffizient von f für alle $n \in \mathbb{Z}$.

(c) Für alle $r \in [0,1)$ ist $P(f, r\cdot) : z \mapsto P(f, rz)$ in $L^1(\mathbb{T})$ und erfüllt

$$P(f, r\cdot) = \int_{\mathbb{T}} P(r\zeta) T_\zeta f\, dm(\zeta).$$

AUFGABE 3.5. Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ einer der Banachräume $(C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_{\mathbb{T}})$, $(L^p(\mathbb{T}), \|\cdot\|_p)$ mit $1 \le p < \infty$. Zeigen Sie, daß für alle $f \in X$ die folgenden Aussagen gelten:

(a) Für alle $r \in (0,1]$ gilt $\|P(f, r\cdot)\|_X \le \|f\|_X$.
(b) $\lim_{r\to 1^-} P(f, r\cdot) = f$ in $(X, \|\cdot\|)$.
(c) Ist die Funktion $P(f,\cdot)$ auf $\mathbb{D}$ reellwertig, so ist auch f reellwertig.

AUFGABE 3.6. Zeigen Sie: Für alle $f \in H^p(\mathbb{T})$, $1 \le p \le \infty$ ist die Funktion $z \mapsto P(f,z)$ auf $\mathbb{D}$ holomorph und es gilt $\|P(f, r\cdot)\|_p \le \|f\|_p$.

AUFGABE 3.7. Zeigen Sie, daß für alle $a \in \mathbb{T}$ die Funktion

$$f_a : \mathbb{T} \to \mathbb{C}, \qquad z \mapsto \exp\Big(-\frac{a+z}{a-z}\Big)$$

eine innere Funktion ist.

AUFGABE 3.8. Sei $f \in L^\infty(\mathbb{T})$, $1 \le p \le \infty$ und bezeichne $M_f : L^p(\mathbb{T}) \to L^p(\mathbb{T})$ den Operator der Multiplikation mit f auf $L^p(\mathbb{T})$. Zeigen Sie:

$$\sigma(M_f, L^p(\mathbb{T})) = \sigma_{L^\infty(\mathbb{T})}(f) = \operatorname{ess\,ran} f.$$

AUFGABE 3.9 (Arithmetik innerer Funktionen). Mit Hilfe des Satzes von Beurling kann man Teilbarkeitseigenschaften innerer Funktionen studieren: Sind θ_1, θ_2 zwei innere Funktionen auf $\mathbb{T}$, so nennen wir θ_1 einen *Teiler* von θ_2 und schreiben $\theta_1 \big| \theta_2$, falls eine innere Funktion θ_0 existiert mit $\theta_2 = \theta_0\theta_1$ m-fast überall auf $\mathbb{T}$. Zeigen Sie:

(a) Sind θ_1, θ_2 innere Funktionen auf $\mathbb{T}$, so gilt:

$$\theta_1 \big| \theta_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \theta_1 H^2(\mathbb{T}) \subseteq \theta_2 H^2(\mathbb{T}).$$

(b) Zu je endlich vielen inneren Funktionen $\theta_1, \ldots, \theta_n$ auf $\mathbb{T}$ gibt es ein *kleinstes gemeinsames Vielfaches* (kgV) in der Menge der inneren Funktionen, d.h. eine innere Funktion θ_0 mit $\theta_j \big| \theta_0$ für $j = 1, \ldots, n$ und mit der Eigenschaft, daß $\theta_0 \big| \theta$ für alle inneren Funktionen θ mit $\theta_j \big| \theta$ für $j = 1, \ldots, n$ gilt.

(c) Zu je endlich vielen inneren Funktionen $\theta_1, \ldots, \theta_n$ auf $\mathbb{T}$ gibt es einen *größten gemeinsamen Teiler* (ggT) in der Menge der inneren Funktionen, d.h. eine innere Funktion θ_0 mit $\theta_0 \big| \theta_j$ für $j = 1, \ldots, n$ und mit der Eigenschaft, daß $\theta \big| \theta_0$ für alle inneren Funktionen θ mit $\theta \big| \theta_j$ für $j = 1, \ldots, n$ gilt.

Hinweis zu (b) und (c) betrachten Sie die abgeschlossenen Unterräume

$$\mathcal{M}_\Sigma := \overline{\mathrm{LH}\Big(\bigcup_{j=1}^n M_{\theta_j}(H^2(\mathbb{T}))\Big)} \qquad \text{und} \qquad \mathcal{M}_\Delta := \bigcap_{j=1}^n M_{\theta_j}(H^2(\mathbb{T}))\,.$$

Aufgabe 3.10. Sei $\psi : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ eine auf $\mathbb{D}$ holomorphe Funktion. Zeigen Sie: Genau dann gibt es eine Funktion $f \in H^2(\mathbb{T})$ mit $\hat{f}(z) = \psi(z)$ für alle $z \in \mathbb{D}$, wenn gilt

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{|\psi^{(n)}(0)|^2}{(n!)^2} < \infty\,.$$

Es ist dann

$$\|f\|_2 = \Big(\sum_{n=0}^\infty \frac{|\psi^{(n)}(0)|^2}{(n!)^2}\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Aufgabe 3.11. Sei $h \in H^1(\mathbb{T})$ keine m-Nullfunktion. Zeigen Sie:

$$m(\{z \in \mathbb{T}\,;\, h(z) = 0\}) = 0\,.$$

Aufgabe 3.12. Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, dessen Einheitskugel keine Extremalpunkte besitzt. Zeigen Sie, daß dann $(E, \|\cdot\|)$ nicht isometrisch isomorph zum Dualraum eines Banachraumes sein kann.

Hinweis: Erinnern Sie sich an die Sätze von Banach-Alaoglu und Krein-Milman aus der Funktionalanalysis.

Aufgabe 3.13. Zeigen Sie mit Hilfe der vorhergehenden Aufgabe: Der Banachraum $(L^1(\mathbb{T}), \|\cdot\|_1)$ ist **nicht** isometrisch isomorph zum Dualraum eines Banachraums.

Auf ähnliche Weise kann man zeigen, daß auch $L^1(\mathbb{T})/H^1_0(\mathbb{T})$ nicht isometrisch isomorph zu einem dualen Banachraum sein kann (siehe die Arbeit [**7**] von T. Ando).

Aufgabe 3.14. Sei $\mathcal{A}(\mathbb{T}) := \{f \in C(\mathbb{T})\,;\, \hat{f}_{-n} = 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$. Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{A}(\mathbb{T})$ ist eine abgeschlossene Unteralgebra von $C(\mathbb{T})$ und

$$\mathcal{A}(\mathbb{T}) = \{f \in C(\mathbb{T})\,;\, \exists g \in C(\overline{\mathbb{D}}) \cap \mathcal{O}(\mathbb{D}) : \quad f \equiv g|\mathbb{T}\,\}.$$

(b) Berechnen Sie $\Delta_{C(\mathbb{T})}(\mathcal{A}(\mathbb{T}))$.

Aufgabe 3.15. Zeigen Sie, daß die Abbildung $u \mapsto \psi_u$ mit

$$\psi_u(f + H^1_0(\mathbb{T})) := \int_\mathbb{T} f(z)u(z)\,dm(z) \qquad (f + H^1_0(\mathbb{T}) \in L^1(\mathbb{T})/H^1_0(\mathbb{T}))$$

einen isometrischen Isomorphismus von $H^\infty(\mathbb{T})$ auf den topologischen Dualraum von $L^1(\mathbb{T})/H^1_0(\mathbb{T})$ definiert.

Eine Eindeutigkeitsaussage für den Prädualraum von $H^\infty(\mathbb{T})$ wurde von T. Ando in [**7**] angegeben.

Aufgabe 3.16. Sei $(\mathfrak{R}, \|\cdot\|)$ eine C^*–Algebra mit Einselement 1 und sei $L : \mathfrak{R} \to \mathbb{C}$ ein stetiges lineares Funktional mit $L(1) = 1 = \|L\|$. Zeigen Sie, daß L dann ein positives lineares Funktional ist, d.h., daß $L(a) \geq 0$ für alle positiven Elemente aus $\mathfrak{R}$ gilt.

Hinweis: Sei $0 \leq a \in \mathfrak{R}$ und sei $\mathfrak{R}_a$ die von 1 und a erzeugte abgeschlossene Unteralgebra von $\mathfrak{R}$. Wenden Sie den Rieszschen Darstellungssatz auf die zu $\mathfrak{R}_a$ isometrisch isomorphe Banachalgebra $C(\sigma(a))$ an und zeigen Sie, daß es ein positives Maß $\mu \in \mathrm{rca}(\sigma(a))$ gibt mit $L(a) = \int_{\sigma(a)} z\, d\mu$.

Aufgabe 3.17. Sei $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ reellwertig. Zeigen Sie, daß es dann eine invertierbare Funktion $u \in H^\infty(\mathbb{T})$ gibt mit $|u| = e^f$ m-fast überall auf $\mathbb{T}$.

Aufgabe 3.18. Sei $\phi \in \Delta(H^\infty(\mathbb{T}))$ und seien L_1 und L_2 zwei positive lineare Funktionale auf $L^\infty(\mathbb{T})$, die auf $H^\infty(\mathbb{T})$ mit ϕ übereinstimmen. Zeigen Sie, daß dann schon $L_1 = L_2$ gilt.

Hinweis: Ist f eine beliebige reellwertige Funktion aus $L^\infty(\mathbb{T})$ und u zu f gemäß Aufgabe 3.17 gewählt, so zeige man zunächst

$$|\phi(u)| \leq L_1(e^f) \quad \text{und} \quad |\phi(1/u)| \leq L_2(e^{-f}).$$

Zeigen Sie nun, daß die Funktion $\psi : t \mapsto \psi(t) := L_1(e^{tf})L_2(e^{-tf})$ auf $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist und in $t = 0$ ihr Minimum annimmt. Berechnen Sie $\psi'(0)$.

Aufgabe 3.19. Seien $u \in H^\infty(\mathbb{T})$ und $w \in \mathbb{D}$ mit $\mathcal{E}_z(u) = 0$. Zeigen Sie: Die Funktion v mit

$$v(\zeta) := \frac{\overline{\zeta}u(\zeta)}{1 - w\overline{\zeta}} \qquad (\zeta \in \mathbb{T})$$

liegt in $H^\infty(\mathbb{T})$ und erfüllt $(e_1 - w)v = u$.

Aufgabe 3.20. Sei K ein kompakter Hausdorffraum und sei $\mathfrak{A}$ eine abgeschlossene Unteralgebra von $C(K)$, die die Konstanten enthält. Sei weiter $\mathcal{S}$ eine multiplikative Halbgruppe von Funktionen aus $\mathfrak{A}$ mit $|u| \equiv 1$ für alle $u \in \mathcal{S}$ und mit $1 \in \mathcal{S}$. Zeigen Sie:

(a) Die Abschließung $\mathfrak{A}(\mathcal{S})$ von $\{f\overline{u}\,; u \in \mathcal{S}, f \in \mathfrak{A}\}$ ist eine Banachalgebra.
(b) Sind $\phi_1, \phi_2 \in \Delta(\mathfrak{A}(\mathcal{S}))$ mit $\phi_1(f) = \phi_2(f)$ für alle $f \in \mathfrak{A}$, so gilt schon $\phi_1 = \phi_2$.
(c) Durch $\phi \mapsto \rho(\phi) := \phi|_{\mathfrak{A}}$ wird eine stetige Einbettung von $\Delta(\mathfrak{A}(\mathcal{S}))$ in $\Delta(\mathfrak{A})$ gegeben.
(d) $\rho(\Delta(\mathfrak{A}(\mathcal{S}))) = \{\varphi \in \Delta(\mathfrak{A})\,; |\varphi(u)| = 1 \text{ für alle } u \in \mathcal{S}\}$.

Aufgabe 3.21. Zeigen Sie:

(a) $\Delta(L^\infty(\mathbb{T}))$ ist kanonisch homöomorph zu

$$\Delta_{L^\infty} := \{\phi \in \Delta(H^\infty(\mathbb{T}))\,; |\phi(u)| = 1 \text{ für alle inneren Funktionen } u\}.$$

(b) $\Delta(H^\infty(\mathbb{T}) + C(\mathbb{T}))$ ist kanonisch homöomorph zu

$$\Delta_e := \{\phi \in \Delta(H^\infty(\mathbb{T}))\,; |\phi(e_1)| = 1\}.$$

KAPITEL 4

Toeplitzoperatoren auf $H^2(\mathbb{T})$

Da $H^2(\mathbb{T})$ ein abgeschlossener Unterraum des Hilbertraums $L^2(\mathbb{T})$ ist, gibt es eine eindeutig bestimmte orthogonale Projektion P von $L^2(\mathbb{T})$ auf $H^2(\mathbb{T})$. Es gilt

$$\ker P = H^2(\mathbb{T})^\perp = \{g \in L^2(\mathbb{T})\,;\, \hat{g}_n = 0 \text{ für alle } n \geq 0\}.$$

Da die Familie $\{e_n\,;\, n \in \mathbb{Z}\}$ (mit $e_n(z) = z^n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, $z \in \mathbb{T}$) eine Orthonormalbasis von $L^2(\mathbb{T})$ ist, hat jede Funktion $f \in L^2(\mathbb{T})$ eine eindeutige, bezüglich $\|\cdot\|_2$ konvergente Fourierreihendarstellung

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n e_n\,.$$

Die Projektion P auf $H^2(\mathbb{T})$ ist daher gegeben durch

$$Pf = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}_n e_n\,. \tag{4.1}$$

Die folgende Aussage wird später benötigt:

$$\forall g \in \ker P = H^2(\mathbb{T})^\perp : \quad \overline{g} \in H^2_0(\mathbb{T}) := \{u \in L^2(\mathbb{T})\,;\, \hat{u}_n = 0 \text{ für alle } n \leq 1\} \subset H^2(\mathbb{T}). \tag{4.2}$$

Für $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ definieren wir den *Toeplitzoperator* T_f mit dem Symbol f durch

$$T_f := PM_f\big|_{H^2(\mathbb{T})} : H^2(\mathbb{T}) \to H^2(\mathbb{T})\,, \qquad h \mapsto T_f h := P(fh)\,.$$

Wegen

$$\|T_f h\|_2 = \|P(fh)\|_2 \leq \|P\| \cdot \|f\|_\infty \cdot \|h\|_2 \leq \|f\|_\infty \cdot \|h\|_2 \qquad (h \in H^2(\mathbb{T}))$$

ist $T_f \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit

$$\|T_f\| \leq \|f\|_\infty \qquad \text{für alle } f \in L^\infty(\mathbb{T}). \tag{4.3}$$

Die Abbildung $f \mapsto T_f$ ist also kontraktiv. Wegen $T_1 = \mathrm{id}_{H^2(\mathbb{T})}$ ist sie auch unital. Für alle $f \in L^\infty(\mathbb{T})$, $u, v \in H^2(\mathbb{T})$ gilt weiter

$$\langle T_{\overline{f}} u, v\rangle = \langle P(\overline{f}u), v\rangle = \langle \overline{f}u, v\rangle = \langle u, fv\rangle = \langle u, P(fv)\rangle = \langle u, T_f v\rangle$$

und es folgt $T_{\overline{f}} = T_f^*$.

Wir halten fest:

Lemma 4.1. *Die Abbildung $f \mapsto T_f$ ist eine lineare, unitale, kontraktive $*$-Abbildung von $L^\infty(\mathbb{T})$ nach $\mathcal{L}(H^2(\mathbb{T}))$.*

Natürlich ist die Abbildung $f \mapsto T_f$ im allgemeinen nicht multiplikativ.

Ist speziell $f \in H^\infty(\mathbb{T})$, so ist $H^2(\mathbb{T})$ ein M_z-invarianter Unterraum und T_f stimmt mit der Restriktion $M_f\big|_{H^2(\mathbb{T})} : H^2(\mathbb{T}) \to H^2(\mathbb{T})$ des Operators der Multiplikation mit f auf $H^2(\mathbb{T})$ überein.

Im folgenden ersten Abschnitt dieses Kapitels stellen wir einige elementare Grundlagen der Spektraltheorie von Toeplitzoperatoren auf $H^2(\mathbb{T})$ bereit.

4.1. Elementare Eigenschaften von Toeplitzoperatoren auf $H^2(\mathbb{T})$

Für eine obere Abschätzung des Spektrums von Toeplitzoperatoren zeigen wir zunächst ein auch in anderen Situationen nützliches Lemma.

LEMMA 4.2. *Sei a ein normales Element einer C^*–Algebra $\mathcal{A}$ mit Einselement $1_{\mathcal{A}}$. Ist $\Phi : \mathrm{LH}\{a, 1_{\mathcal{A}}\} \to \mathcal{B}$ eine lineare Abbildung von $\mathrm{LH}\{a, 1_{\mathcal{A}}\}$ in eine Banachalgebra $\mathcal{B}$ mit Einselement $1_{\mathcal{B}}$, die $\|\Phi\| = 1$ und $\Phi(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathcal{B}}$ erfüllt, so gilt*

$$\sigma_{\mathcal{B}}(\Phi(a)) \subseteq \operatorname{conv} \sigma_{\mathcal{A}}(a).$$

BEWEIS. (a) Wir zeigen zunächst:

Ist $b \in \mathrm{LH}\{a, 1_{\mathcal{A}}\}$ mit $\sigma_{\mathcal{A}}(b) \subset \mathbb{H}_r := \{z \in \mathbb{C}\,;\, \mathrm{Re} z > 0\}$, so gilt auch $\sigma_{\mathcal{B}}(\Phi(b)) \subset \mathbb{H}_r$.

Wegen $\sigma_{\mathcal{A}}(b) \subset \mathbb{H}_r = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n(n)$ und der Kompaktheit des Spektrums von b gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\sigma_{\mathcal{A}}(b) \subset U_n(n)$. Nach dem spektralen Abbildungssatz hat man

$$\sigma_{\mathcal{A}}\Big(\frac{1}{n}b - 1_{\mathcal{A}}\Big) = \frac{1}{n}\sigma_{\mathcal{A}}(b - n1_{\mathcal{A}}) \subset \frac{1}{n}(U_n(n) - n) = \mathbb{D}.$$

Da b normal ist, folgt

$$\Big\|\frac{1}{n}b - 1_{\mathcal{A}}\Big\|_{\mathcal{A}} = r_{\mathcal{A}}\Big(\frac{1}{n}b - 1_{\mathcal{A}}\Big) < 1.$$

Also hat man

$$\Big\|\Phi\Big(\frac{1}{n}b\Big) - 1_{\mathcal{B}}\Big\|_{\mathcal{B}} = \Big\|\Phi\Big(\frac{1}{n}b - 1_{\mathcal{A}}\Big)\Big\|_{\mathcal{B}} \leq \Big\|\frac{1}{n}b - 1_{\mathcal{A}}\Big\|_{\mathcal{A}} < 1$$

und daher $\sigma_{\mathcal{B}}\left(\Phi\big(\frac{1}{n}b\big) - 1_{\mathcal{B}}\right) \subset \mathbb{D}$. Wieder mit dem spektralen Abbildungssatz folgt

$$\sigma_{\mathcal{B}}(b) \subset U_n(n) \subset \mathbb{H}_r\,.$$

(b) Da die konvexe Hülle von $\sigma_{\mathcal{A}}(a)$ mit dem Durchschnitt über alle offenen das Spektrum von a enthaltenden Halbebenen übereinstimmt, genügt es zu zeigen, daß jede offene Halbebene in $\mathbb{C}$, die $\sigma_{\mathcal{A}}(a)$ enthält auch das Spektrum von $\Phi(a)$ in $\mathcal{B}$ enthält. Sei also H eine beliebige das Spektrum von a enthaltende Halbebene und sei λ ein Randpunkt von H. Dann folgt $\sigma_{\mathcal{A}}(a - \lambda) \subset H - \lambda$, wobei $H - \lambda$ jetzt eine offene Halbebene in $\mathbb{C}$ ist, deren Randgerade durch 0 verläuft. Dann gibt es ein $t \in \mathbb{R}$, so daß die gedrehte Halbebene $e^{it}(H - \lambda)$ mit $\mathbb{H}_r$ übereinstimmt und $\sigma_{\mathcal{A}}(e^{it}(a - \lambda)) \subset \mathbb{H}_r$ gilt. Nach Beweisteil (a) angewendet auf $b := e^{it}(a - \lambda 1_{\mathcal{A}})$ folgt $\sigma_{\mathcal{B}}\left(\Phi(e^{it}(a - \lambda 1_c A))\right) \subset \mathbb{H}_r$ und hieraus mit dem spektralen Abbildungssatz

$$\sigma_{\mathcal{B}}(\Phi(a)) = \sigma_{\mathcal{B}}(\Phi(e^{-it}b + \lambda 1_{\mathcal{A}})) = \sigma_{\mathcal{B}}(e^{-it}\Phi(b) + \lambda 1_{\mathcal{B}}) = e^{-it}\sigma_{\mathcal{B}}(\Phi(b)) + \lambda \subset e^{-it}\mathbb{H}_r + \lambda = H$$

und damit die Behauptung. □

Für $A \in \mathcal{L}(H^2(\mathbb{T}))$ schreiben wir kurz $\sigma(A)$ für $\sigma_{\mathcal{L}(H^2(\mathbb{T}))}(A) = \sigma(A, H^2(\mathbb{T}))$.

FOLGERUNG 4.3 (Brown-Halmos). *Für alle $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ gilt $\sigma(T_f) \subseteq \operatorname{conv}(\operatorname{ess\,ran} f)$.*

BEWEIS. Wir wenden Lemma 4.2 an auf $\mathcal{A} := L^\infty(\mathbb{T})$, $\mathcal{B} := \mathcal{L}(H^2(\mathbb{T}))$, $\Phi : f \mapsto T_f$ und beachten $\sigma_{L^\infty(\mathbb{T})}(f) = \operatorname{ess\,ran} f$ (nach Aufgabe 3.8). □

Der folgende Satz von Hartmann und Wintner zeigt, daß hierbei auch das Gleichheitszeichen auftreten kann:

SATZ 4.4 (Hartman-Wintner). *Ist $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ reellwertig, so gilt $\sigma(T_f) = [a_f, b_f]$ mit $a_f := \min \operatorname{ess\,ran}(f)$ und $b_f = \max \operatorname{ess\,ran}(f)$.*

Beweis. Nach Folgerung 4.3 genügt es, die Inklusion $[a_f, b_f] \subseteq \sigma(T_f)$ zu beweisen. Sei $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \sigma(T_f)$ beliebig. Dann gibt es eine Funktion $h \in H^2(\mathbb{T})$ mit

$$P((\lambda - f)h) = (\lambda - T_f)h = 1 \qquad m\text{–fast überall.}$$

Mit $u := (1 - P)((\lambda - f)h)$ gilt $u \in L^2(\mathbb{T}) \ominus H^2(\mathbb{T})$ und daher $\overline{u} \in H^2(\mathbb{T})$ (nach (4.2)).

Wegen $(\lambda - f)h = 1 + u$ und der Tatsache, daß f reellwertig ist und λ reell ist, folgt

$$(\lambda - f)\overline{h} = 1 + \overline{u} \in H^2(\mathbb{T})$$

und daher auch

$$(\lambda - f)|h|^2 = (1 + \overline{u})h \in H^1(\mathbb{T}).$$

Da die linke Seite reellwertig ist, gibt es nach Satz 3.1 eine reelle Konstante α mit $(\lambda - f)|h|^2 = \alpha$ m-fast überall. Nach dem Satz von F. und M. Riesz (Satz 3.12) gilt $|h(z)|^2 > 0$ für m-fast alle $z \in \mathbb{T}$. $\lambda - f$ und α haben daher m-fast überall das gleiche Vorzeichen. Also kann λ nicht in dem Intervall $[-a_f, b_f]$ liegen. □

Ist also $B \subset \mathbb{T}$ eine Borelmenge mit $0 < m(B) < 1$, so gilt

$$\sigma(T_{\chi_B}) = [0, 1].$$

Die Abbildung $f \mapsto L^\infty(\mathbb{T})$ ist zwar nicht multiplikativ, es gilt jedoch noch:

Lemma 4.5. *Für alle $f \in L^\infty(\mathbb{T})$, $g, h \in H^\infty(\mathbb{T})$ gilt:*

$$T_{fg} = T_f T_g \qquad \text{und} \qquad T_{\overline{h}f} = T_{\overline{h}} T_f\,.$$

Beweis. Für alle $u \in H^2(\mathbb{T})$ gilt:

$$T_{fg}u = P(fgu) = T_f(gu) = T_f P(gu) = T_f T_g u\,,$$

da $gu \in H^2(\mathbb{T})$ liegt. Da die Abbildung $f \mapsto T_f$ eine $*$-Abbildung ist folgt die zweite Gleichung wie folgt aus der ersten:

$$T_{\overline{h}f} = (T_{\overline{f}h})^* = (T_{\overline{f}} T_h)^* = T_{\overline{h}} T_f.$$

□

Satz 4.6. *Ist $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ und T_f in $\mathcal{L}(H^2)$ invertierbar, so ist f in $L^\infty(\mathbb{T})$ invertierbar.*

Beweis. Ist T_f in $\mathcal{L}(H^2)$ invertierbar, so gibt es eine Konstante $c > 0$ mit

$$\forall u \in H^2(\mathbb{T}): \qquad \|T_f u\|_2 \geq c\|u\|_2\,.$$

Für alle $u \in H^2(\mathbb{T})$, $n \in \mathbb{Z}$ folgt (wegen $|e_n(z)| = |z^n| = 1$ für alle $z \in \mathbb{T}$)

$$\|M_f(e_n u)\|_2 = \|f e_n u\|_2 = \|fu\|_2 \geq \|P(fu)\|_2 = \|T_f u\|_2 \geq c\|u\|_2 = c\|e_n u\|_2\,.$$

Da die Menge $\{e_n u\,;\, u \in H^2(\mathbb{T}), n \in \mathbb{Z}\}$ dicht in $L^2(\mathbb{T})$ liegt, folgt $\|M_f g\|_2 \geq c\|g\|_2$ für alle $g \in L^2(\mathbb{T})$. Da mit T_f auch $T_f^* = T_{\overline{f}}$ in $\mathcal{L}(H^2(\mathbb{T}))$ invertierbar ist, gibt es ebenso eine Konstante $c_* > 0$ mit

$$\forall g \in L^2(\mathbb{T}): \qquad \|M_f^* g\|_2 = \|M_{\overline{f}} g\|_2 \geq c_*\|g\|_2\,.$$

Daher ist M_f in $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{T}))$ invertierbar (vergl. Aufgabe 4.1). Insbesondere ist 0 nicht in $\sigma(M_f, L^2(\mathbb{T}))$ enthalten. Wegen $\sigma(M_f, L^2(\mathbb{T})) = \operatorname{ess\,ran} f = \sigma_{L^\infty(\mathbb{T})}(f)$ (vergl. Aufgabe 3.8) ist f in $L^\infty(\mathbb{T})$ invertierbar. □

Wegen $\lambda - T_f = T_{\lambda - f}$ erhält man aus Satz 4.6 und Aufgabe 4.1 unmittelbar:

Folgerung 4.7 (Hartman-Wintner). *Für alle $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ gilt:* $\operatorname{ess\,ran} f \subseteq \sigma(T_f)$.

Zusammen mit dem Satz 4.3 von Brown und Halmos hat man also folgende Abschätzungen für das Spektrum eines beliebigen Toeplitzoperators T_f, $f \in L^\infty(\mathbb{T})$:

$$\operatorname{ess\,ran} f \subseteq \sigma(T_f) \subseteq \operatorname{conv} \operatorname{ess\,ran} f\,.$$

Folgerung 4.8. *Für alle $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ gilt:* $\|T_f\| = r(T_f) = \|f\|_\infty$.

Beweis. Nach Lemma 4.1 und Folgerung 4.7 gilt

$$\|f\|_\infty \geq \|T_f\| \geq r(T_f) = \sup\{|\lambda|\,;\, \lambda \in \sigma(T_f)\} = \sup\{|\lambda|\,;\, \lambda \in \operatorname{ess\,ran} f\} = \|f\|_\infty\,.$$

□

Folgerung 4.9. *Die Abbildung $f \mapsto T_f$ ist eine lineare $*$-Isometrie.*

Folgerung 4.10. *Ist $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ und T_f quasinilpotent, so ist f eine m-Nullfunktion und $T_f = 0$.*

Satz 4.11 (Wintner). *Für $h \in H^\infty(\mathbb{T})$ gilt:*

(a) *T_h ist genau dann invertierbar, wenn h in H^∞ invertierbar ist.*

(b) *$\sigma(T_h) = \sigma_{H^\infty(\mathbb{T})}(h) = \overline{\hat{h}(\mathbb{D})}$, wobei $\hat{h}$ die Gelfandtransformierte zu h sei.*

Beweis. (a) Existiert $g \in H^\infty(\mathbb{T})$, so folgt mit Lemma 4.5

$$T_hT_g = T_{hg} = T_1 = 1 := \mathrm{id}_{H^2(\mathbb{T})} = T_gT_h$$

und damit die Invertierbarkeit von T_h.

Ist umgekehrt T_h invertierbar, so ist nach Satz 4.6 die Funktion h in $L^\infty(\mathbb{T})$ invertierbar, d.h. es ist $g := 1/h \in L^\infty(\mathbb{T})$. Wegen Lemma 4.5 gilt

$$T_hT_g = T_{gh} = T_1 = 1\,,$$

d.h. T_g ist linksinvers zu T_h, muß daher mit T_h^{-1} übereinstimmen. Es folgt $1 = T_hT_g = hP(g)$. Wenden wir hierauf M_g an, so folgt $g = ghP(g) = P(g)$ und damit $g \in H^2(\mathbb{T}) \cap L^\infty(\mathbb{T}) = H^\infty(\mathbb{T})$. Also ist h in $H^\infty(\mathbb{T})$ invertierbar.

(b) Aus (a) folgt leicht $\sigma(T_h) = \sigma_{H^\infty(\mathbb{T})}(h)$. Nach Satz 3.16 gilt $\sigma_{H^\infty(\mathbb{T})}(h) = \overline{\hat{h}(\mathbb{D})}$. □

Ist $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ein Fredholmoperator (also mit $\dim\ker T < \infty$ und $\operatorname{codim}\operatorname{ran}T < \infty$) auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$, so ist sein Index definiert durch

$$\operatorname{ind} T = \dim\ker T - \operatorname{codim}\operatorname{ran}T = \dim\ker T - \dim\ker T^*.$$

Folgerung 4.12. *Für eine in $L^\infty(\mathbb{T})$ invertierbare Funktion $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ ist der Toeplitzoperator T_f genau dann ein Fredholmoperator, wenn $T_{1/f}$ einer ist. In diesem Fall gilt:* $\operatorname{ind} T_f = -\operatorname{ind} T_{1/f}$

Beweis. Nach Folgerung 3.22 gibt es eine äußere Funktion $g \in H^2(\mathbb{T})$ mit $|f| = |g|$ m-fast überall. Insbesondere ist $f = gu$ mit einer unimodularen Funktion u. Wegen $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ ist $g \in L^\infty(\mathbb{T}) \cap H^2(\mathbb{T}) = H^\infty(\mathbb{T})$. Da f und damit auch g in $L^\infty(\mathbb{T})$ invertierbar ist, ist g nach Satz 3.17 auch in $H^\infty(\mathbb{T})$ invertierbar. Mit Lemma 4.5 folgt

$$T_{1/f} = T_{\overline{u}}T_{1/g} = (T_{f/g})^*T_{1/g} = T_{1/g}^*T_f^*T_{1/g},$$

wobei $T_{1/g}$ nach Satz 4.11 invertierbar ist. Mit dem Satz von Atkinson (siehe z.B. Satz 10.8 in [**3**]) folgt nun die Behauptung. □

Satz 4.13. *Sei $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ keine m-Nullfunktion. Dann gilt:*

(a) (Coburn) *Entweder ist* $\ker T_f = \{0\}$ *oder* $\ker T_f^* = \{0\}$.

(b) *T_f ist genau dann invertierbar,wenn T_f ein Fredholmoperator vom Index 0 ist.*

(c) *T_f ist kein kompakter Operator.*

Beweis. (a) Annahme: Es gibt von Null verschiedene Funktionen $u \in \ker T_f$ und $v \in \ker T_f^* = \ker T_{\overline{f}}$. Dann ist $P(fu) = 0 = P(\overline{f}v)$ und somit $fu, \overline{f}v \in \ker P$. Mit (4.2) folgt $\overline{fu}, f\overline{v} \in H_0^2(\mathbb{T})$ und somit

$$\overline{fu}v, uf\overline{v} = \overline{\overline{fu}v} \in H_0^1(\mathbb{T}) := \{h \in H^1(\mathbb{T})\,;\, \hat{h}_0 = 0\}.$$

Da der Fourierkoeffizient zum Index 0 von $\overline{f}uv$ Null ist folgt nach Satz 3.1 $\overline{f}uv = 0$ m-fast überall. Dies ist jedoch nicht möglich, da u und v beide nach dem Satz von F. und M. Riesz m-fast überall von 0 verschieden sind und f nach Voraussetzung auf einer Menge von positivem Maß ebenfalls von 0 verschieden ist. Die Annahme war also falsch. Es muß die Behauptung gelten.

(b) Ist T_f ein Fredholmoperator vom Index $0 = \dim\ker T_f - \dim\ker T_f^*$ so muß nach (a) schon $\ker T_f = \ker T_f^* = \{0\}$ gelten und somit T_f bijektiv, also invertierbar sein.

Ist T_f invertierbar, so ist T_f natürlich auch ein Fredholmoperator vom Index 0.

(c) Wäre T_f ein kompakter Operator so wäre für alle $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ der Operator $\lambda - T_f = T_{\lambda - f}$ ein Fredholmoperator vom Index 0 und daher nach (b) invertierbar. Damit würde man $\sigma(T_f) = \{0\}$ erhalten, was nach Folgerung 4.10 und der Voraussetzung an f nicht möglich ist. Also kann T_f kein kompakter Operator sein. □

4.2. Die Toeplitz–Algebra $\mathcal{T}(L^\infty(\mathbb{T}))$

Ist $\mathcal{S}$ eine Teilmenge von $L^\infty(\mathbb{T})$ mit $1 \in \mathcal{S}$, so bezeichnen wir mit $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ sie abgeschlossene von $\{T_f\,;\, f \in \mathcal{S}\}$ erzeugte Unteralgebra von $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Ist die Menge $\mathcal{S}$ symmetrisch (d.h. es gilt $\overline{f} \in \mathcal{S}$ für alle $f \in \mathcal{S}$), so ist $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ eine C^*–Unteralgebra von $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Insbesondere sind wir natürlich an der C^*–Algebra $\mathcal{T}(L^\infty(\mathbb{T}))$ interessiert. Die Symbolabbildung $\tau : f \mapsto T_f$, von der wir bereits wissen, daß sie eine unitale, isometrische, lineare $*$-Abbildung ist, induziert dann eine Abbildung

$$\tau_c : L^\infty(\mathbb{T}) \to \mathcal{T}(L^\infty(\mathbb{T}))/\operatorname{com}(\mathcal{T}(L^\infty(\mathbb{T}))), \qquad f \mapsto \pi(\tau(f)),$$

von $L^\infty(\mathbb{T})$ in die (nach Aufgabe 2.5) kommutative C^*–Algebra $\mathcal{T}(L^\infty(\mathbb{T}))/\operatorname{com}(\tau(L^\infty(\mathbb{T})))$ wobei $\pi : \mathcal{T}(L^\infty(\mathbb{T})) \to \mathcal{T}(L^\infty(\mathbb{T}))/\operatorname{com}(\tau(L^\infty(\mathbb{T})))$ den kanonischen Epimorphismus bezeichne. τ_c ist dann offensichtlich eine unitale, kontraktive, lineare $*$-Abbildung. Es gilt sogar:

Satz 4.14. *τ_c ist ein isometrischer $*$–Isomorphismus. Man hat also eine kurze exakte Sequenz*

$$\{0\} \longrightarrow \operatorname{com}(\tau(L^\infty(\mathbb{T}))) \hookrightarrow \mathcal{T}(L^\infty(\mathbb{T})) \xrightarrow{\rho} L^\infty(\mathbb{T}) \longrightarrow \{0\}$$

mit $\rho \circ \tau = \mathrm{id}_{L^\infty(\mathbb{T})}$.

Beweis. (a) Zunächst zeigen wir, daß τ_c ein Algebrenhomomorphismus ist. Nur die Multiplikativität ist zu beweisen. Wegen der schon zuvor bemerkten Stetigkeit von τ_c genügt es, die Multiplikativität auf der dichten Teilalgebra $\mathcal{Q}$ von $L^\infty(\mathbb{T})$ (vergl. Satz 3.25) nachzurechnen. Seien also $f = \overline{\theta}u, g = \overline{\varphi}v \in \mathcal{Q}$ beliebig (mit inneren Funktionen θ, φ und Funktionen $u, v \in H^\infty(\mathbb{T})$). Unter Verwendung von Lemma 4.5 folgt

$$\begin{aligned}\tau(fg) = T_{fg} = T_{\overline{\theta}u\overline{\varphi}v} = T_{\overline{\theta}}T_{\overline{\varphi}}T_uT_v &= T_{\overline{\theta}}T_uT_{\overline{\varphi}}T_v + T_{\overline{\theta}}(T_{\overline{\varphi}}T_u - T_uT_{\overline{\varphi}})T_v \\ &= T_fT_g + T_{\overline{\theta}}(T_{\overline{\varphi}}T_u - T_uT_{\overline{\varphi}})T_v \in \tau(f)\tau(g) + \operatorname{com}(\tau(L^\infty(\mathbb{T})))\end{aligned}$$

und damit $\tau_c(fg) = \tau_c(f)\tau_c(g)$.

(b) Um zu beweisen, daß τ_c eine Isometrie ist, müssen wir nach Satz 2.11 nur noch zeigen, daß τ_c injektiv ist. Zu diesem Zweck beweisen wir

$$\forall f \in L^\infty(\mathbb{T}) : \qquad \|\tau_c(f)\| = \inf_{K \in \operatorname{com}(\tau(L^\infty(\mathbb{T})))} \|T_f + K\| \geq \|T_f\| = \|f\|_\infty . \tag{4.4}$$

Da $\mathcal{Q}$ in $L^\infty(\mathbb{T})$ dicht liegt, ist eine dichte Teilmenge von $\operatorname{com}(\tau(L^\infty(\mathbb{T})))$ gegeben durch die Menge aller Operatoren der Form

$$K = \sum_{j=1}^{n} A_j(T_{u_j\overline{\theta_j}}T_{v_j\overline{\varphi_j}} - T_{v_j\overline{\varphi_j}}T_{u_j\overline{\theta_j}}) \prod_{k=1}^{m_j} T_{w_{j,k}\overline{\psi_{j,k}}} \tag{4.5}$$

mit $n \in \mathbb{N}$, mit $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{T}(L^\infty(\mathbb{T}))$, mit $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}$, mit inneren Funktionen $\theta_j, \varphi_j, \psi_{j,k}$ und mit $H^\infty(\mathbb{T})$–Funktionen $u_j, v_k, w_{j,k}$ für $j = 1, \ldots, n, k = 1, \ldots, m_j$. Um (4.4) zu beweisen genügt es also zu zeigen, daß für alle Operatoren K wie in (4.5) gilt

$$\forall f \in L^\infty(\mathbb{T}) : \qquad \|T_f + K\| \geq \|T_f\| \,. \tag{4.6}$$

Seien also K wie in (4.5), $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ und $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben und sei $h \in H^2(\mathbb{T})$ mit $\|h\|_2 = 1$ und $\|T_f h\|_2 \geq \|T_f\| - \varepsilon$. Die Funktion

$$\theta := \prod_{\nu=1}^{n} \Big(\theta_\nu \varphi_\nu \prod_{\mu=1}^{m_\nu} \psi_{\nu,\mu}\Big)$$

ist als Produkt endlich vieler innerer Funktionen wieder eine innere Funktion. Man berechnet mit Lemma 4.5 unter Verwendung von

$$\overline{\theta_j}\theta_j = \overline{\varphi_j}\varphi_j = \overline{\psi_{j,k}}\psi_{j,k} = 1$$

für alle $j = 1, \ldots, n, k = 1, \ldots, m_j$,

$$K(\theta h) = \sum_{j=1}^{n} A_j \Big(\prod_{\nu=1,\nu\neq j}^{n} \Big(\theta_\nu \varphi_\nu \prod_{\mu=1}^{m_\nu} \psi_{\nu,\mu}\Big)\Big)(T_{u_j}T_{v_j} - T_{v_j}T_{u_j}) \prod_{k=1}^{m_j} T_{w_{j,k}} = 0,$$

da Toeplitzoperatoren mit $H^\infty(\mathbb{T})$-Symbolen paarweise kommutieren. Die Funktion fh können wir schreiben in der Form $fh = h_1 + h_2$ mit $h_1 = P(fh) = T_f h \in H^2(\mathbb{T})$ und $h_2 \in H^2(\mathbb{T})^\perp$. Da θ eine innere Funktion ist, folgt $\theta h_1 \in H^2(\mathbb{T})$ und $\theta h_1 \perp \theta h_2$. Da also θh_2 und $(1-P)(\theta h_2)$ orthogonal zu θh_1 sind, ist auch $P(\theta h_2) = \theta h_2 - (1-P)(\theta h_2)$ orthogonal zu $\theta h_1 = P(\theta h_1)$. Es folgt mit Pythagoras

$$\begin{aligned}\|T_f\| - \varepsilon &\leq \|T_f h\|_2 = \|h_1\|_2 = \|\theta h_1\|_2 \\ &\leq \|\theta h_1 + P(\theta h_2)\|_2 = \|P(\theta f h)\|_2 = \|T_f(\theta h)\|_2 = \|(T_f + K)(\theta h)\|_2 \,.\end{aligned}$$

Für $\varepsilon \to 0$ erhalten wir wie gewünscht die Aussage (4.6).

(c) Die Exaktheit der Sequenz gilt nun mit $\rho := \tau_c^{-1} \circ \pi$, wobei

$$\pi : \mathcal{T}(L^\infty(\mathbb{T})) \to \mathcal{T}(L^\infty(\mathbb{T}))/\operatorname{com}(\tau(L^\infty(\mathbb{T}))) \tag{4.7}$$

wieder der kanonische Epimorphismus sei. □

Satz 4.15. *Für alle $f \in L^\infty(\mathbb{T})$, $g \in C(\mathbb{T})$ sind die Operatoren $T_f T_g - T_{fg}$, $T_g T_f - T_{fg}$ und $T_f T_g - T_g T_f$ kompakt.*

Beweis. (a) Wir beweisen zunächst die Kompaktheit des ersten dieser drei Operatoren. Da die trigonometrischen Polynome in $C(\mathbb{T})$ dicht liegen und das zweiseitige Ideal $\mathcal{K}(H^2(\mathbb{T}))$ der kompakten Operatoren in $\mathcal{L}(H^2(\mathbb{T})$ abgeschlossen ist, genügt es zu zeigen, daß für alle $n \in \mathbb{Z}$ der Operator $T_f T_{e_n} - T_{fe_n}$ kompakt ist. Für $n \geq 0$ folgt dies aus Lemma 4.5. Für $n = -1$ und alle $h \in H^2(\mathbb{T})$ gilt

$$\begin{aligned}T_f T_{e_{-1}} h &= P(fP(e_{-1}h)) = P(f(e_{-1}h - \hat{h}_0 e_{-1})) = P(fe_{-1}h) - \hat{h}_0 P(fe_{-1}) \\ &= T_{fe_{-1}} h - \hat{h}_0 P(fe_{-1}) \,.\end{aligned}$$

Der Operator $T_f T_{e_{-1}} - T_{fe_{-1}}$ ist also ein Operator mit eindimensionalem Bildraum und daher kompakt. Sei nun $N \in \mathbb{N}$ und sei schon gezeigt, daß $T_f T_{e_n} - T_{fe_n}$ für alle $n \geq -N$, $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ kompakt ist. Dann folgt mit Lemma 4.5 für alle $f \in L^\infty(\mathbb{T})$:

$$T_f T_{e_{-N-1}} - T_{fe_{-N-1}} = (T_f T_{e_{-N}} - T_{fe_{-N}})T_{e_{-1}} + (T_{fe_{-N}} T_{e_{-1}} - T_{(fe_{-N})e_{-1}})$$

und hieraus nach Induktionsvoraussetzung die Kompaktheit von $T_f T_{e_{-N-1}} - T_{fe_{-N-1}}$. Also ist $T_f T_{e_n} - T_{fe_n}$ kompakt für alle $n \in \mathbb{Z}$. Wie schon zuvor bemerkt, folgt hieraus die Kompaktheit von $T_f T_g - T_{fg}$ für alle $f \in L^\infty(\mathbb{T})$, $g \in C(\mathbb{T})$.

(b) Sind $f \in L^\infty(\mathbb{T})$, $g \in C(\mathbb{T})$ beliebig, so folgt nach (a) die Kompaktheit von $T_{\overline{f}}T_{\overline{g}} - T_{\overline{fg}}$ und hieraus (da Adjungierte von kompakten Operatoren wieder kompakt sind) die Kompaktheit von $T_gT_f - T_{fg} = (T_{\overline{f}}T_{\overline{g}} - T_{\overline{fg}})^*$.

(c) Schließlich folgt aus (a) und (b) die Kompaktheit von

$$T_fT_g - T_gT_f = (T_fT_g - T_{fg}) - (T_gT_f - T_{fg})$$

für alle $f \in L^\infty(\mathbb{T})$, $g \in C(\mathbb{T})$. □

Satz 4.16. *Für das Kommutatorideal $\mathcal{K}$ von $\tau(C(\mathbb{T}))$ in $\mathcal{T}(C(\mathbb{T}))$ gilt:*

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}(H^2(\mathbb{T})) \subset \operatorname{com}(\tau(L^\infty(\mathbb{T}))).$$

Beweis. Nach dem vorhergehenden Satz ist $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}(H^2)$ und offensichtlich gilt

$$\mathcal{K} \subset \operatorname{com}(\tau(L^\infty(\mathbb{T}))).$$

Wir müssen also nur zeigen, daß $\mathcal{K}$ alle kompakten Operatoren aus $\mathcal{L}(H^2(\mathbb{T}))$ enthält. Da sowohl $\mathcal{K}$ wie auch $\mathcal{K}(H^2(\mathbb{T}))$ in $\mathcal{L}(H^2(\mathbb{T}))$ bezüglich der Operatornorm abgeschlossen sind und die Menge $\mathcal{F}(H^2(\mathbb{T}))$ der Operatoren mit endlich dimensionalen Bild in $\mathcal{K}(H^2(\mathbb{T}))$ dicht liegt, genügt es $\mathcal{F}(H^2(\mathbb{T})) \subset \mathcal{K}$ zu beweisen. Die Operatoren aus $\mathcal{L}(H^2(\mathbb{T}))$ mit endlich dimensionalem Bild haben die Gestalt

$$h \mapsto \sum_{j=1}^{n} \langle h, f_n \rangle g_n$$

mit $n \in \mathbb{N}$, $f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_n \in H^2(\mathbb{T})$. Da die holomorphen Polynome in $H^2(\mathbb{T})$ dicht liegen, liegt auch die Menge aller Operatoren dieser Art mit holomorphen Polynomen $f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_n$ dicht in $\mathcal{K}(H^2(\mathbb{T}))$. Jedes holomorphe Polynom ist endliche Linearkombination von Monomen e_n, $n \in \mathbb{N}_0$. Es genügt daher zu zeigen, daß alle Operatoren der Gestalt

$$A_{n,m}: \quad h \mapsto \langle h, e_n \rangle e_m = \hat{h}_n e_m$$

mit $n, m \in \mathbb{N}_0$ in $\mathcal{K}$ enthalten sind. Direkte Rechnung zeigt

$$T_{e_{-1}}T_{e_1} - T_{e_1}T_{e_{-1}} = A_{0,0}: \quad h \mapsto \hat{h}_0 1$$

und für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$:

$$T_{e_m}(T_{e_{-1}}T_{e_1} - T_{e_1}T_{e_{-1}})T_{e_{-n}} = A_{n,m}: \quad h \mapsto \hat{h}_n e_m\,.$$

Damit folgt $A_{n,m} \in \mathcal{K}$ für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$ und der Satz ist bewiesen. □

Der kanonische Epimorphismus π in (4.7) läßt sich wegen $\mathcal{K}(H^2(\mathbb{T})) \subset \operatorname{com}(\tau(L^\infty(\mathbb{T})))$ zerlegen in $\pi = \pi_2 \circ \pi_1$ wobei jeweils

$$\pi_1 : \mathcal{T}(L^\infty(\mathbb{T})) \to \mathcal{T}(L^\infty(\mathbb{T}))/\mathcal{K}(H^2(\mathbb{T}))$$

und

$$\pi_2 : \mathcal{T}(L^\infty(\mathbb{T}))/\mathcal{K}(H^2(\mathbb{T})) \to \mathcal{T}(L^\infty(\mathbb{T}))/\operatorname{com}(\tau(L^\infty(\mathbb{T})))$$

die kanonischen Epimorphismen bezeichne. Durch $\tau_c^{-1} \circ \pi_2$ ist also ein unitaler $*$–Epimorphismus $\tau_{\mathcal{K}}$ von $\mathcal{T}(L^\infty(\mathbb{T}))/\mathcal{K}(H^2(\mathbb{T}))$ auf $L^\infty(\mathbb{T})$ gegeben. Wir halten fest:

Folgerung 4.17. *Es gibt einen unitalen $*$–Epimorphismus*

$$\tau_{\mathcal{K}} : \mathcal{T}(L^\infty(\mathbb{T}))/\mathcal{K}(H^2(\mathbb{T})) \to L^\infty(\mathbb{T})$$

mit $\rho = \tau_{\mathcal{K}} \circ \pi_1$, ρ wie in Satz 4.14. Insbesondere gilt $f = \tau_{\mathcal{K}} \circ \pi_1(T_f)$ für alle $f \in L^\infty(\mathbb{T})$.

Folgerung 4.18. *Ist $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ eine Funktion für die T_f ein Fredholmoperator ist, so ist f in $L^\infty(\mathbb{T})$ invertierbar. Für alle $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ gilt*

$$\operatorname{ess\,ran} f \subseteq \sigma_e(T_f) := \sigma_{\mathcal{Q}}(T_f + \mathcal{K}(H^2(\mathbb{T})))\,.$$

Da ein Operator genau dann ein Fredholmoperator ist, wenn er modulo der kompakten Operatoren (also seine Restklasse in der Calkin–Algebra) invertierbar ist, folgt dies unmittelbar aus Folgerung 4.17.

FOLGERUNG 4.19. *Ist T_f ein kompakter Operator, $f \in L^\infty(\mathbb{T})$, so ist schon $f = 0$ m–fast überall.*

FOLGERUNG 4.20 (L.A. Coburn). *Die kurze Sequenz*

$$\{0\} \longrightarrow \mathcal{K}(H^2(\mathbb{T})) \hookrightarrow \mathcal{T}(C(\mathbb{T})) \longrightarrow C(\mathbb{T}) \longrightarrow \{0\}$$

ist exakt. Insbesondere ist $\tau_{\mathcal{K}}\big|C(\mathbb{T}) : C(\mathbb{T}) \to \mathcal{T}(C(\mathbb{T}))/\mathcal{K}(H^2(\mathbb{T}))$ ein isometrischer $*$–Isomorphismus.

BEWEIS. Nach der vorhergehenden Folgerung ist $\tau_{\mathcal{K}}\big|C(\mathbb{T})$ injektiv und wegen Lemma 4.1 und Satz 4.15 ein unitaler $*$-Isomorphismus. $\square$

BEMERKUNG 4.21. Nach Satz 4.15 ist die C^*–Algebra $\mathcal{T}(C(\mathbb{T}))/\mathcal{K}(H^2(\mathbb{T}))$ eine C^*–Unteralgebra des Zentrums von $\mathcal{T}(L^\infty(\mathbb{T}))/\mathcal{K}(H^2(\mathbb{T}))$.

Wir können daher das lokale Prinzip für C^*-Algebren aus Kapitel 2 anwenden. Dieses werden wir im übernächsten Abschnitt ausführen. Zuvor wollen wir den Index für Fredholmoperatoren mit stetigen Symbolen angeben. Hierzu benötigen wir die Einführung der Windungszahl stetiger Wege bezüglich eines nicht auf der Spur des Weges liegenden Punktes mit Hilfe einer stetigen Argumentfunktion (vergl. z.B. [**30**]).

SATZ 4.22 (Satz vom stetigen Argument). *Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein stetiger Weg in $\mathbb{C}$ und sei $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$. Dann gibt es eine stetige Funktion $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit*

$$\forall t \in [a, b] : \qquad \gamma(t) - \lambda = |\gamma(t) - \lambda| e^{i\alpha(t)}. \tag{4.8}$$

Wir nennen α eine stetige Argumentfunktion für $\gamma - \lambda$. Je zwei stetige Argumentfunktionen für $\gamma - \lambda$ unterscheiden sich höchstens durch ein konstantes, ganzzahliges Vielfaches von 2π.

BEWEIS. Sei $\rho := \operatorname{dist}(\lambda, \gamma([a, b]))$. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von γ auf $[a, b]$ gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$\forall t, s \in [a, b] : \qquad |t - s| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |\gamma(s) - \lambda - (\gamma(t) - \lambda)| = |\gamma(s) - \gamma(t)| < \rho.$$

Zu δ existiert eine endliche Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ von $[a, b]$ mit $t_j - t_{j-1} < \delta$ für $j = 1, \ldots, n$. Insbesondere ist $\gamma([a, b] \cap [a, t_1]) - \lambda$ eine kompakte Teilmenge der offenen Kreisscheibe $U_\rho(\gamma(a) - \lambda)$ und $0 \notin U_\rho(\gamma(a) - \lambda)$. Auf dieser Kreisscheibe existiert also ein (bis auf ein ganzes Vielfaches von $2\pi i$ eindeutig bestimmter) holomorpher Zweig L_1 der Logarithmusfunktion. Wir definieren

$$\forall t \in [a, t_1] : \qquad \alpha(t) := -i(L_1(\gamma(t) - \lambda) - \log|\gamma(t) - \lambda|).$$

Dann ist α auf $[a, t_1]$ stetig und erfüllt

$$\forall t \in [a, t_1] : \qquad \gamma(t) - \lambda = |\gamma(t) - \lambda| e^{i\alpha(t)}.$$

Sind nun für ein $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq n - 1$ holomorphe Zweige L_j, $j = 1, \ldots, k$, der Logarithmusfunktion gefunden, so daß die durch

$$\forall t \in [t_{j-1}, t_j] : \qquad \alpha(t) := -i(L_j(\gamma(t) - \lambda) - \log|\gamma(t) - \lambda|). \quad j = 1, \ldots, k,$$

definierte Funktion $\alpha : [a, t_k] \to \mathbb{R}$ stetig ist und

$$\forall t \in [a, t_k] : \qquad \gamma(t) - \lambda = |\gamma(t) - \lambda| e^{i\alpha(t)} \tag{4.9}$$

gilt, so gibt es auf $U_k := U_\rho(\gamma(t_k) - \lambda)$ (wegen $0 \notin U_k$) einen eindeutig bestimmten Zweig L_{k+1} des Logarithmus mit

$$L_{k+1}(\gamma(t_k) - \lambda) = L_k(\gamma(t_k) - \lambda).$$

Da $\gamma([t_k, t_{k+1}])$ eine kompakte Teilmenge von U_k ist, ist die auf $[t_k, t_{k-1}]$ durch

$$\alpha(t) := -i(L_{k+1}(\gamma(t) - \lambda) - \log|\gamma(t) - \lambda|)$$

für $t_k \leq t \leq t_{k+1}$ fortgesetzte Funktion α auf $[a, t_{k+1}]$ stetig und erfüllt (4.9) für $k+1$ statt k. Schließlich erhalten wir nach endlich vielen Schritten eine auf $[a, b] = [a, t_n]$ stetige Funktion mit (4.8). Die Eindeutigkeitsaussage ist dann klar. ☐

Insbesondere ist in der Situation dieses Satzes der Argumentzuwachs $\alpha(b) - \alpha(a)$ unabhängig von der speziellen stetigen Argumentfunktion.

Folgerung 4.23. *: Ist $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein geschlossener Weg (d.h. mit $\gamma(a) = \gamma(b)$) und $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$, so gibt es ein von der speziellen stetigen Argumentfunktion α aus Satz 4.22 unabhängiges $n \in \mathbb{Z}$ mit $\alpha(b) - \alpha(a) = 2n\pi$. n heißt die Windungszahl oder Umlaufzahl von γ bezüglich λ und wird mit $n(\gamma, \lambda)$ bezeichnet.*

Man kann zeigen, daß die so definierte Windungszahl mit der z.B. in [**38, 2**] definierten Windungszahl übereinstimmt (siehe [**2**], Lemma 5.8). Insbesondere gilt für rektifizierbare oder sogar stückweise glatte, geschlossene Wege γ die bekannte Formel

$$n(\gamma, \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - \lambda}\, dz.$$

Ist $f \in C(\mathbb{T})$ und $\lambda \notin f(\mathbb{T})$ so definieren wir $n(f, \lambda) := n(\gamma_f, \lambda)$ wobei $\gamma_f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ der durch $\gamma_f(t) := f(e^{it})$, $t \in [0, 2\pi]$, definierte stetige Weg sei.

Die Operatoren T_z und $T_z^* = T_{\overline{z}} = T_{e_{-1}}$ sind offensichtlich Fredholmoperatoren mit $\operatorname{codim} \operatorname{ran} T_z = 1 = \dim\ker T_{\overline{z}}$ und $\ker T_z = \{0\}$, $\operatorname{ran} T_{\overline{z}} = H^2(\mathbb{T})$, d.h. mit $\operatorname{ind} T_z = -1$ und $\operatorname{ind} T_{\overline{z}} = 1$. Nach dem Satz von Atkinson (siehe z.B. Satz 10.8 in [**3**]) sind dann für alle $n \in \mathbb{N}_0$ auch die Operatoren $T_{e_n} = T_z^n$ und $T_{e_{-n}} = T_{\overline{z}}^n$ Fredholmoperatoren vom Index $\operatorname{ind} T_{e_n} = -n$, $\operatorname{ind} T_{e_{-n}} = n$.

Satz 4.24. *Sei $f \in C(\mathbb{T})$. Genau dann ist T_f ein Fredholmoperator auf $H^2(\mathbb{T})$, wenn f keine Nullstelle besitzt, d.h. wenn f in $C(\mathbb{T})$ invertierbar ist. Ist dies der Fall, so gilt*

$$\operatorname{ind} T_f = -n(f, 0).$$

Beweis. Nach Folgerung 4.20 ist T_f genau dann ein Fredholmoperator, also[1] seine Restklasse in der Calkin–Algebra $\mathcal{L}(HH^2(\mathbb{T}))/\mathcal{K}(H^2(\mathbb{T}))$ invertierbar, wenn f in $C(\mathbb{T})$ invertierbar ist, also keine Nullstellen besitzt. Sei nun $f \in C(\mathbb{T})$ mit $0 \notin f(\mathbb{T})$ und sei $n := n(f, 0)$. Dann gilt nach Satz 4.22 und Folgerung 4.23

$$f(e^{it}) = r(t)e^{i\alpha(t)} \qquad (t \in [0, 2\pi]),$$

mit einer stetigen Argumentfunktion $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $\alpha(2\pi) - \alpha(0) = 2n\pi$ und $r(t) := \log|f(e^{it})|$ für alle $t \in [0, 2\pi]$. Wir definieren eine Homotopie $h : [0, 1] \to C(\mathbb{T})$ mit $h(0) = f$ und $h(1) = e_n$ durch

$$h(s, e^{it}) := r(t)^{1-s} \exp\left(i\left(snt + (1-s)\alpha(t)\right)\right) \qquad \text{für } 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 2\pi\,.$$

Mit $\beta(s, t) := snt + (1-s)\alpha(t)$ gilt $\beta(s, 2\pi) - \beta(s, 0) = 2n\pi$. Da auch $r(0)^{(1-s)} = r(2\pi)^{(1-s)}$ und $r(t)^{(1-s)} \neq 0$ gilt, ist $s \mapsto h(s, \cdot)$ eine $C(\mathbb{T})$-wertige Funktion ist, die ihre Werte in der offenen Menge der invertierbaren Elemente von $C(\mathbb{T})$ annimmt. Man weist leicht nach, daß $h \in C([0, 1], C(\mathbb{T}))$ gilt. Insbesondere ist dann die operatorwertige Funktion $s \mapsto T_{h(s,\cdot)}$

[1] Siehe z.B. [**3**], Folgerung 10.20.

stetig mit Werten in den Fredholmoperatoren auf $H^2(\mathbb{T})$. Wegen der Stetigkeit des Indexes (siehe z.B. [**3**], Folgerung 10.13) folgt

$$\operatorname{ind} T_f = \operatorname{ind} T_{h(0,\cdot)} = \operatorname{ind} T_{h(1,\cdot)} = \operatorname{ind} T_{e_n} = -n = -n(f,0)$$

und damit die Behauptung. □

Zusammen mit Satz 4.13 ergibt sich:

FOLGERUNG 4.25. *Ist $f \in C(\mathbb{T})$, so ist T_f genau dann invertierbar, wenn f keine Nullstelle besitzt und $n(f,0) = 0$ gilt.*

FOLGERUNG 4.26. *Ist $f \in C(\mathbb{T})$, so gilt*

$$\sigma(T_f) = f(\mathbb{T}) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus f(\mathbb{T})\,;\, n(f,\lambda) \neq 0\} \qquad \textit{und} \qquad \sigma_e(T_f) = f(\mathbb{T}).$$

4.3. Zusammenhang des wesentlichen Spektrums

Ziel dieses Abschnitts ist zu zeigen daß das wesentliche Spektrum und das Spektrum von Toeplitzoperatoren auf $H^2(\mathbb{T})$ zusammenhängend ist.

Im folgenden sei $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ beliebig aber fest. Für $n \in \mathbb{Z}$ bezeichnen wir mit $\rho_n(T_f)$ die Menge aller $\lambda \in \mathbb{C}$ für die $\lambda - T_f$ ein Fredholmoperator vom Index n ist. Nach Satz 4.13 gilt

$$\sigma(T_f) = \sigma_e(T_f) \cup \bigcup_{0 \neq n \in \mathbb{Z}} \rho_n(T_f).$$

Die Mengen $\rho_n(T_f)$, $n \in \mathbb{Z}$, sind offen und paarweise disjunkt. Für $z \in \rho_n(T_f)$ ist mit $\lambda - T_f$ auch der Operator

$$T_{(\lambda - f)e_n} = \begin{cases} (\lambda - T_f)T_{e_n} & \text{für } n \geq 0 \\ T_{e_n}(\lambda - T_f) & \text{für } n < 0 \end{cases} \tag{4.10}$$

nach dem Satz von Atkinson ein Fredholmoperator vom Index 0 und daher nach Satz 4.13 invertierbar. Da die Funktion $\lambda - f$ in $L^\infty(\mathbb{T})$ invertierbar ist (wegen $\operatorname{ess\,ran} f \subseteq \sigma_e(T_f)$ nach Folgerung 4.18) ist nach Folgerung 4.12 auch $T_{1/(\lambda - f)}$ ein Fredholmoperator und $\operatorname{ind} T_{1/(\lambda-f)} = -n$. Daher ist auch $T_{e_{-n}/(\lambda - f)}$ ein Fredholmoperator vom Index 0 und somit invertierbar. Die $\mathcal{L}(H^2(\mathbb{T}))$-wertigen Funktionen $\lambda \mapsto T_{(\lambda-f)e_n}$ und $\lambda \mapsto T_{e_{-n}/(\lambda-f)}$ sind auf der offenen Menge $\rho_n(T_f)$ holomorph, also gilt dies auch für die $H^2(\mathbb{T})$–wertigen Funktionen

$$\lambda \mapsto u_\lambda := T^{-1}_{(\lambda-f)e_n} 1 \quad \text{und} \quad \lambda \mapsto v_\lambda := T^{-1}_{e_{-n}/(\lambda-f)} 1\,. \tag{4.11}$$

Die durch

$$U(\lambda, z) := \widehat{u_\lambda}(z)\,, \quad V(\lambda, z) := \widehat{u_\lambda}(z) \qquad (\lambda \in \rho_n(T_f),\, z \in \mathbb{D}) \tag{4.12}$$

auf $\rho_n(T_f) \times \mathbb{D}$ definierten Funktionen U, V sind dann getrennt holomorph und somit nach dem Satz von Hartogs aus der Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher beliebig oft stetig komplex differenzierbar.

Im folgenden Lemma fassen wir einige Eigenschaften der so konstruierten Funktionen zusammen.

LEMMA 4.27. *Für die in* (4.11) *und* (4.12) *eingeführten Funktionen gilt:*
(a) *Für alle $\lambda \in \rho_n(T_f)$ ist $u_\lambda v_\lambda = 1$.*
(b) *Für alle $\lambda \in \rho_n(T_f)$, $z \in \mathbb{D}$ ist $U(\lambda,z)V(\lambda,z) = 1$.*
(c) *$U(\cdot, z)$ genügt für alle $z \in \mathbb{D}$ der Differentialgleichung*

$$\frac{d}{d\lambda} U(\lambda, z) = -U(\lambda, z) P\widehat{\Big(\frac{1}{\lambda - f}\Big)}(z)\,. \tag{4.13}$$

(d) *Ist* $h \in H^\infty(\mathbb{T})$ *und* $w_\lambda := u_\lambda P\big(\frac{e_{-n}h}{\lambda - f}\big)$ *für alle* $\lambda \in \rho_n(T_f)$, *so gilt* $w_\lambda \in H^2(\mathbb{T})$ *und* $T_{e_n(\lambda-f)}w_\lambda = h$.

(e) *Ist* λ_0 *ein fester Punkt aus* $\rho_n(T_f)$ *und ist* λ *ein beliebiger Punkt aus der den Punkt* λ_0 *enthaltenden Zusammenhangskomponente* Ω_0 *von* $\rho_n(T_f)$, *so gilt für jeden stückweise glatten Weg* γ_λ *in* Ω_0 *mit Anfangspunkt* λ_0 *und Endpunkt* λ *und alle* $z \in \mathbb{D}$:

$$U(\lambda, z) = U(\lambda_0, z) \exp\Big(-\int_{\gamma_\lambda} \widehat{P\big(\frac{1}{\mu - f}\big)}(z)\, d\mu\Big)$$

$$V(\lambda, z) = V(\lambda_0, z) \exp\Big(\int_{\gamma_\lambda} \widehat{P\big(\frac{1}{\mu - f}\big)}(z)\, d\mu\Big).$$

Beweis. (a) Wegen $P(e_n(\lambda - f))u_\lambda = T_{e_n(\lambda-f)}u_\lambda = 1$ und $P(e_{-n}/(\lambda - f))v_\lambda = T_{e_{-n}/(\lambda-f)}v_\lambda = 1$ gibt es für alle $\lambda \in \rho_n(T_f)$ Funktionen $a_\lambda, b_\lambda \in L^2(\mathbb{T}) \ominus H^2(\mathbb{T})$ mit

$$e_n(\lambda - f)u_\lambda = 1 + a_\lambda \tag{4.14}$$

und

$$\frac{e_{-n}v_\lambda}{\lambda - f} = 1 + b_\lambda\,. \tag{4.15}$$

Multiplikation dieser beiden Gleichungen ergibt

$$u_\lambda v_\lambda = 1 + a_\lambda + b_\lambda + a_\lambda b\lambda\,.$$

Hierbei ist die linke Seite in $H^1(\mathbb{T})$ und die Funktion $a_\lambda + b_\lambda + a_\lambda b\lambda$ konjugiert komplex zu einer Funktion aus $H^1_0(\mathbb{T})$. Daher muß (a) gelten.

(b) folgt mit Lemma 3.14 aus (a).

(c) Nach (4.14) gilt $e_n(\lambda - f)u_\lambda - 1 = a_\lambda$, wobei beide Seiten bezüglich λ holomorphe $L^2(\mathbb{T})$-wertige Funktionen mit Werten in dem abgeschlossenen Unterraum $L^2(\mathbb{T}) \ominus H^2(\mathbb{T})$ von $L^2(\mathbb{T})$ sind. Differentiation nach λ ergibt

$$e_n u_\lambda + e_n(\lambda - f)\frac{du_\lambda}{d\lambda} = \frac{da_\lambda}{d\lambda}$$

und somit

$$u_\lambda = -(\lambda - f)\frac{du_\lambda}{d\lambda} + e_{-n}\frac{da_\lambda}{d\lambda}\,.$$

Multiplikation dieser Gleichung mit $v_\lambda/(\lambda - f)$ liefert wegen (a) und (4.15):

$$\frac{1}{\lambda - f} = -v_\lambda\frac{du_\lambda}{d\lambda} + \frac{e_{-n}v_\lambda}{\lambda - f}\frac{da_\lambda}{d\lambda} = -v_\lambda\frac{du_\lambda}{d\lambda} + (1 + b_\lambda)\frac{da_\lambda}{d\lambda}\,.$$

Hierbei ist die linke Seite in $L^\infty(\mathbb{T}) \subset L^2(\mathbb{T})$, der erste Summand der rechten Seite in $H^1(\mathbb{T})$ und der zweite wieder konjugiert komplex zu einer Funktion aus $H^1_0(\mathbb{T})$. Es folgt

$$P\big(\frac{1}{\lambda - f}\big) = -v_\lambda\frac{du_\lambda}{d\lambda}$$

und hieraus nach Multiplikation mit u_λ wegen (a):

$$\frac{du_\lambda}{d\lambda} = -P\big(\frac{1}{\lambda - f}\big)u_\lambda\,.$$

Für alle $z \in \mathbb{D}$ wenden wir hierauf die Evaluationsabbildung $\mathcal{E}_z$ an. Da diese stetig und linear ist, vertauscht sie mit der Differentiation nach λ und wir erhalten (4.13).

(d) Zu der $H^2(\mathbb{T})$–Funktion $w_\lambda := T^{-1}_{e_n(\lambda-f)}h$ gibt es eine Funktion $c \in H^2_0(\mathbb{T})$ mit $e_n(\lambda - f)w_\lambda = h + \overline{c}$. Multiplikation mit $\frac{e_{-n}v_\lambda}{\lambda - f}$ ergibt nach (4.15):

$$v_\lambda w_\lambda = \frac{e_{-n}v_\lambda h}{\lambda - f} + \overline{c}(1 + b_\lambda)\,.$$

Hierbei liegt die linke Seite in $H^1(\mathbb{T})$, der erste Summand der rechten Seite in $L^2(\mathbb{T})$ und $\overline{c}(1+b_\lambda)$ ist konjugiert komplex zu einer Funktion aus $H^1_0(\mathbb{T})$. Daher folgt $v_\lambda w_\lambda = P\big(\frac{e_{-n}v_\lambda h}{\lambda - f}\big) \in H^2(\mathbb{T})$. Multiplikation mit u_λ liefert wegen (a) die Behauptung.

(e) Die Behauptung für V folgt mit Hilfe von (b) aus der für U. Die Behauptung für U ergibt sich aus (c) unter Anwendung des folgenden Lemmas aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen in $\mathbb{C}$ (für alle $z \in \mathbb{D}$). □

Lemma 4.28. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet in $\mathbb{C}$ und $F \in \mathcal{O}(\Omega)$. Ist $\varphi \in \mathcal{O}(\Omega)$ eine Lösung der linearen gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung*

$$\varphi'(\lambda) = F(\lambda)\varphi(\lambda)$$

in Ω, so gilt für jeden stückweise stetig differenzierbaren Weg $\gamma : [a,b] \to \Omega$ in Ω:

$$\varphi(\gamma(b)) = \varphi(\gamma(a)) \exp\Big(\int_\gamma F(\mu)\,d\mu\Big)\,.$$

Beweis. Besitzt φ eine Nullstelle λ_0 in Ω, so folgt nach dem lokalen Existenz– und Eindeutigkeitssatz[2] $\varphi \equiv 0$ in einer Umgebung von λ_0 und somit nach dem Identitätssatz $\varphi \equiv 0$ auf Ω.

Sei nun φ nullstellenfrei und sei $\gamma : [a,b] \to \Omega$ ein beliebiger stückweise stetig differenzierbarer Weg in Ω. Für $a \le s \le b$ sei $\gamma_s := \gamma|_{[a,s]}$ und

$$h(s) := \varphi(\gamma(a)) \exp\Big(\int_{\gamma_s} F(\mu)\,d\mu\Big)\,.$$

Dann ist $h : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig und daher die Menge

$$J := \{s \in [a,b]\,;\, \varphi(\gamma(s)) = h(s)\}$$

abgeschlossen in $[a,b]$. Wegen $a \in J$ ist die Menge J nicht leer. Wir zeigen, daß sie auch relativ offen in $[a,b]$ ist. Ist dies gezeigt, so folgt $J = [a,b]$ und das Lemma ist bewiesen.

Sei also $s \in J$ beliebig und daher

$$\varphi(\gamma(s)) = h(s) = \varphi(\gamma(a)) \exp\Big(\int_{\gamma_s} F(\mu)\,d\mu\Big) =: w_s\,.$$

Nach dem Existenz und Eindeutigkeitssatz für gewöhnliche Differentialgleichungen gibt es eine in Ω enthaltene Kreisscheibe U_s von $\gamma(s)$, so daß die Anfangswertaufgabe

$$y'(\lambda) = F(\lambda)y(\lambda)\,, \qquad y(\gamma(s)) = w_0$$

genau eine in U_s holomorphe Lösung besitzt. Diese muß dann mit $\varphi|_{U_s}$ übereinstimmen. Eine Stammfunktion G für F auf U_s mit $F(\gamma(s))$ ist gegeben durch

$$G(\lambda) = \int_{\sigma_\lambda} F(\mu)\,d\mu$$

für $\lambda \in U_s$, wobei σ_λ ein beliebiger stückweise glatter, ganz in U_s verlaufender Weg mit Anfangspunkt $\gamma(s)$ und Endpunkt λ sei. Hierbei ist der Wert $G(\lambda)$ unabhängig von der speziellen Wahl des Weges (siehe z.B. [**2**], Kapitel 3). Die Funktion $\lambda \mapsto w_0 e^{G(z)}$ ist dann ebenfalls eine Lösung der obigen Anfangswertaufgabe und muß daher auf U_s mit φ übereinstimmen. Zu U_s gibt es ein $\delta > 0$ mit $\gamma(\tau) \in U_s$ für alle $\tau \in [a,b]$ mit $s - \delta < \tau < s + \delta$. Definieren wir also für $s \le \tau \le \min\{s+\delta, b\}$:

$$\sigma_{\gamma(\tau)}(t) := \gamma(t) \qquad \text{für } s \le t \le \tau$$

bzw.

$$\sigma_{\gamma(\tau)}(t) := \gamma(s - (t-\tau)) \qquad \text{für } \tau \le t \le s,$$

[2] Zum Beweis des Existenz und Eindeutigkeitssatzes im Komplexen siehe z.B. [**45**].

so folgt für alle $\tau \in [a,b]$ mit $s-\delta < \tau < s+\delta$

$$\begin{aligned}\varphi(\gamma(\tau)) = w_0 e^{G(\gamma(\tau)} &= \varphi(\gamma(a)) \exp\Big(\int_{\gamma_s} F(\mu)\,d\mu\Big) \exp\Big(\int_{\sigma_{\gamma(\tau)}} F(\mu)\,d\mu\Big)\\ &= \varphi(\gamma(a)) \exp\Big(\int_{\gamma_\tau} F(\mu)\,d\mu\Big)\end{aligned}$$

und daher $\tau \in J$. Wie oben bemerkt wurde, folgt hieraus die Behauptung. □

Wir können nun zeigen, daß das wesentliche Spektrum von Toeplitzoperatoren zusammenhängend ist.

Satz 4.29 (Douglas, [**17**]). *Für alle $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ ist das wesentliche Spektrum $\sigma_e(T_f)$ von T_f ist zusammenhängend.*

Beweis. (a) Wir zeigen zunächst: *Ist $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein einfach geschlossener Weg, der ganz in der wesentlichen Resolventenmenge von T_f verläuft, so liegt der wesentliche Wertebereich von f entweder ganz im Innern von γ oder ganz im Äußeren von γ.*

Beweis zu (a): Da die Spur $\gamma([a,b])$ von γ zusammenhängend ist, gibt es ein $n \in \mathbb{Z}$, so daß sie in einer Zusammenhangskomponente Ω_0 von $\rho_n(T_f)$ liegt. Nach Lemma 4.27 gilt mit $\lambda_0 := \gamma(a)$ für alle $z \in \mathbb{D}$:

$$U(\lambda_0, z) = U(\gamma(b), z) = U(\lambda_0, z) \exp\Big(-\int_\gamma \widehat{P\big(\frac{1}{\mu - f}\big)}(z)\,d\mu\Big).$$

Für alle $z \in \mathbb{D}$ mit $U(\lambda_0, z) \neq 0$ folgt daher

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \widehat{P\big(\frac{1}{\mu - f}\big)}(z)\,d\mu \in \mathbb{Z}.$$

Da die Funktion $U(\lambda_0, \cdot) = \widehat{u_{\lambda_0}}$ nach Definition von u_{λ_0} nicht identisch verschwindet, gilt dies auf einer dichten Teilmenge von $\mathbb{D}$. Wegen der Stetigkeit der Funktion $z \mapsto F(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \widehat{P\big(\frac{1}{\mu - f}\big)}(z)\,d\mu$ auf $\mathbb{D}$ ist dies nur möglich, wenn F konstant gleich einer ganzen Zahl N ist.

Für m-fast alle $z \in \mathbb{T}$ liegt wegen $\operatorname{ess\,ran} f \subseteq \sigma_e(T_f)$ der Punkt $f(z)$ nicht auf der Spur von γ und man hat

$$\psi(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\mu - f(z)}\,d\mu = n(\gamma, f(z)).$$

Die so m-fast überall definierte Funktion ψ nimmt nur die Werte 0 oder 1 an und liegt somit in $L^\infty(\mathbb{T})$. Wegen der Stetigkeit der orthogonalen Projektion P auf $H^2(\mathbb{T})$ gilt

$$P\psi = P\Big(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\mu - f(z)}\,d\mu\Big) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma P\Big(\frac{1}{\mu - f}\Big)\,d\mu.$$

Daher ist $\widehat{P\psi} = F$ auf $\mathbb{D}$ konstant und somit auch ψ auf $\mathbb{T}$ m-fast überall gleich einer Konstanten. Da ψ m-fast überall nur die Werte 0 oder 1 annimmt, gilt entweder $n(\gamma, w) = 0$ für alle $w \in \operatorname{ess\,ran} f$ oder $n(\gamma, w) = 1$ für alle $w \in \operatorname{ess\,ran} f$. Damit ist die Behauptung (a) bewiesen.

(b) Sei nun $\sigma_e(T_f) = \sigma_1 \cup \sigma_2$ mit abgeschlossenen Mengen σ_1, σ_2 und gelte $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$ sowie (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) $\sigma_2 \cap \operatorname{ess\,ran} f \neq \emptyset$. Dann gibt es eine offene Menge E, die durch endlich viele, einfach geschlossene, stückweise glatte Jordankurven $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ berandet ist, die sich aus achsenparallelen Geradenstücken zusammen setzen, so daß $\partial E \cap \sigma_e(T_f) = \emptyset$ und $\sigma_1 \subset E$ sowie $\sigma_2 \cap \overline{E} = \emptyset$ gilt. Wir machen nun die Annahme, daß auch σ_1 nicht leer ist und fixieren zwei Punkte $\lambda_1 \in \sigma_1$ und $\lambda_2 \in \sigma_2 \cap \operatorname{ess\,ran} f$.

Dann folgt $n(\gamma_j, \lambda_1) \neq n(\gamma_j, \lambda_2)$ für wenigstens ein $j \in \{1, \dots, k\}$ und somit nach (a) $n(\gamma_j, \lambda_1) \neq n(\gamma_j, \lambda)$ für alle $\lambda \in \operatorname{ess\,ran} f$. Ist $n(\gamma_j, z_2) = 0$, so liegt $\operatorname{ess\,ran} f$ im Äußeren des von $\gamma := \gamma_j$ berandeten einfach zusammenhängenden Gebiets G und es ist $z_1 \in G$. Ist hingegen $n(\gamma_j, z_2) = 1$ so liegt z_1 in der unbeschränkten Zusammenhangskomponente des Komplements von $\operatorname{ess\,ran} f$. Ist K die abgeschlossene Kreisscheibe um 0 mit Radius $\|f\|_\infty = r(T_f)$, so ist $\sigma_e(T_f) \subseteq K$ und $K \cap \operatorname{ess\,ran} f \neq \emptyset$. Man überlegt sich, daß dann auch in diesem Fall ein einfach geschlossener Weg γ existiert, so daß z_1 in dem von γ berandeten, einfach zusammenhängenden Gebiet G liegt und $n(\gamma, \lambda) = 0$ für alle $\lambda \in \operatorname{ess\,ran} f$ gilt. Dies führt zu einem Widerspruch, denn wir zeigen nun

(c)*Ist $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein einfach geschlossener, stückweise stetig differenzierbarer Weg, dessen Spur in $\rho_n(T_f)$ enthalten ist und für den* $\operatorname{ess\,ran} f$ *im Außenbereich liegt, so liegt auch das von γ berandete einfach zusammenhängende Gebiet G in $\rho_n(T_f)$.*

Beweis zu (c): Zur vorgegebenen Situation gibt es noch ein einfach zusammenhängendes Gebiet Ω mit $\overline{G} \subset \Omega$ und $\Omega \setminus G \subset \rho_n(T_f)$. Sei λ_0 ein fester Punkt aus $\gamma([a, b])$. Für alle $\lambda \in \Omega$ sei γ_λ ein stückweise glatter Jordanbogen mit Anfangspunkt λ_0 und Endpunkt λ. Wir definieren für alle $\zeta \in \mathbb{D}$ (mit U, V wie in (4.12)):

$$U_0(\lambda, z) = U(\lambda_0, z) \exp\Big(-\int_{\gamma_\lambda} \widehat{P\big(\frac{1}{\mu - f}\big)}(z)\, d\mu\Big)$$

$$V_0(\lambda, z) = V(\lambda_0, z) \exp\Big(\int_{\gamma_\lambda} \widehat{P\big(\frac{1}{\mu - f}\big)}(z)\, d\mu\Big).$$

Da der Integrand des Integrals jeweils für alle $z \in \mathbb{D}$ auf Ω bezüglich μ holomorph ist und da Ω einfach zusammenhängend ist, sind die Funktionen U_0, V_0 hierdurch auf $\Omega \times \mathbb{D}$ wohldefiniert und getrennt holomorph, also auch holomorph. Da eine Umgebung von $\gamma([a, b])$ in $\rho_n(T_f)$ liegt folgt nach Lemma 4.27 für alle λ aus dieser Umgebung und alle $z \in \mathbb{D}$:

$$U_0(\lambda, z) = U(\lambda, z) = \widehat{u_\lambda}(z) \qquad \text{und} \qquad V_0(\lambda, z) = V(\lambda, z) = \widehat{v_\lambda}(z).$$

Nach Lemma 3.26 gibt es also holomorphe $H^2(\mathbb{T})$–wertige Funktionen $\lambda \mapsto u_{0,\lambda}$, $\lambda \mapsto v_{0,\lambda}$ auf Ω mit $U(\lambda, z) = \widehat{u_{0,\lambda}}(z)$, $V_0(\lambda, z) = \widehat{v_{0,\lambda}}(z)$ für alle $\lambda \in \Omega$, $z \in \mathbb{D}$. Für diese gilt insbesondere $u_{0,\lambda} = u_\lambda$ und $v_{0,\lambda} = v_\lambda$ und somit nach Definition von u_λ, v_λ auch

$$T_{e_n(\lambda - f)} u_{0,\lambda} = T_{e_n(\lambda - f)} u_\lambda = 1$$

und

$$T_{e_{-n}/(\lambda - f)} v_{0,\lambda} = T_{e_{-n}/(\lambda - f)} v_\lambda = 1$$

für alle λ aus einer Umgebung von $\gamma([a, b])$. Nach dem Identitätssatz folgt

$$T_{e_n(\lambda - f)} u_{0,\lambda} = 1 \quad \text{und} \quad T_{e_{-n}/(\lambda - f)} v_{0,\lambda} = 1$$

für alle $\lambda \in \Omega$. Sei nun $h \in H^\infty(\mathbb{T})$ beliebig. Dann ist die Funktion W_h mit

$$W_h(\lambda, z) := U_0(\lambda, z) \widehat{P\Big(\frac{e_{-n} v_{0,\lambda}}{\lambda - f} h\Big)}(z) \qquad (\lambda \in \Omega, z \in \mathbb{D})$$

auf $\Omega \times \mathbb{D}$ holomorph und auf einer Umgebung von $\gamma([a, b])$ gilt nach Teil (d) von Lemma 4.27 $W_h(\lambda, z) = \widehat{w_\lambda}(z)$, $(z \in \mathbb{D})$, mit

$$u_{0,\lambda} P\big(\frac{e_{-n} h}{\lambda - f}\big) = u_\lambda P\big(\frac{e_{-n} h}{\lambda - f}\big) = w_\lambda \in H^2(\mathbb{T})$$

und $T_{e_n(\lambda - f)} w_\lambda = h$. Nach Lemma 3.26 gibt es eine auf ganz Ω holomorphe Funktion $\lambda \mapsto w_{h,\lambda}$ mit $\widehat{w_{h,\lambda}}(z) = W_h(\lambda, z)$ für alle $\lambda \in \Omega, z \in \mathbb{D}$ und es gilt für alle $\lambda \in G$:

$$\|w_{h,\lambda}\|_2 \leq \sup_{\mu \in \partial G} \|w_\lambda\|_2 = \sup_{\mu \in \partial G} \|T^{-1}_{e_n(\mu - f)}\| \cdot \|h\|_2 . \tag{4.16}$$

Sei nun $g \in H^2(\mathbb{T})$ beliebig und $(h_k)_{k=1}^{\infty}$ ein bezüglich $\|\cdot\|_2$ gegen g konvergente Folge aus $H^{\infty}(\mathbb{T})$. Die Folge $(w_{h_k,\lambda})_{k=1}^{\infty}$ der zu h_k gehörigen Funktionen ist dann wegen (4.16) für alle $\lambda \in G$ eine Cauchyfolge in $H^2(\mathbb{T})$ und somit gegen eine Funktion $w_{g,\lambda} \in H^2(\mathbb{T})$ konvergent und es folgt $T_{e_n(\lambda-f)}w_{g,\lambda} = g$. Dies zeigt, daß $T_{e_n(\lambda-f)}$ für alle $\lambda \in \Omega$ surjektiv ist. Indem man die gleichen Argumente für die konjugiert komplexen Werte $\overline{\lambda} \in \Omega^* := \{\overline{\mu}\,;\, \mu \in \Omega\}$ für die zu f konjugiertkomplexe Funktion $\overline{f}$ durchführt sieht man, daß auch $T^*_{e_n(\lambda-f)} = T_{e_{-n}(\overline{\lambda}-\overline{f})}$ surjektiv ist und somit $T_{e_n(\lambda-f)}$ invertierbar ist für alle $\lambda \in \Omega$. Da T_{e_n} ein Fredholmoperator vom Index $-n$ ist, folgt mit (4.10), daß $\lambda - T_f = T_{\lambda-f}$ für alle $\lambda \in \Omega$ ein Fredholmoperator vom Index n ist. Insbesondere ist Ω Teilmenge der wesentlichen Resolventenmenge von T_f. Damit ist der Satz bewiesen. □

Als Folgerung erhalten wir, daß auch das Spektrum von T_f für $f \in L^{\infty}(\mathbb{T})$ zusammenhängend ist.

FOLGERUNG 4.30 (Widom, 1964/66). *Für alle $f \in L^{\infty}(\mathbb{T})$ ist $\sigma(T_f)$ zusammenhängend.*

BEWEIS. Nach dem Satz von Douglas ist $\sigma_e(T_f)$ zusammenhängend. Auf jeder Zusammenhangskomponente der wesentlichen Resolventenmenge ist $\lambda - T_f$ ein Fredholmoperator mit bezüglich λ konstantem Index. Da $\sigma(T_f)$ aus der zusammenhängenden Menge $\sigma_e(T_f)$ durch Hinzunahme aller Zusammenhangskomponenten mit von 0 verschiedenem Index entsteht, ist auch $\sigma(T_f)$ zusammenhängend. □

Übungsaufgaben zu Kapitel 4

AUFGABE 4.1. Sei $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Zeigen Sie: Gibt es Konstante $c, c_* \in (0,\infty)$ so daß für alle $x \in \mathcal{H}$ gilt: $\|Ax\| \geq c\|x\|$ und $\|A^*x\| \geq c_*\|x\|$, so ist A in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ invertierbar.

Literaturverzeichnis

1. Ernst Albrecht, *On decomposable operators*, Integral Equations Operator Theory **2** (1979), no. 1, 1–10. MR MR532735 (80h:47042)
2. ———, *Funktionentheorie*, Vorlesungsskript, Universität des Saarlandes, Saarbrücken (2007).
3. ———, *Funktionalanalysis 1 und 2*, Vorlesungsskript, Universität des Saarlandes, Saarbrücken (2008).
4. Ernst Albrecht and Jörg Eschmeier, *Analytic functional models and local spectral theory*, Proc. London Math. Soc. (3) **75** (1997), no. 2, 323–348. MR MR1455859 (98f:47043)
5. Ernst Albrecht and Rekha D. Mehta, *Some remarks on local spectral theory*, J. Operator Theory **12** (1984), no. 2, 285–317. MR MR757436 (85m:47031)
6. Graham. R. Allan, *Ideals of vector-valued functions*, Proc. London Math. Soc. (3) **18** (1968), 193–216. MR MR0232215 (38 #541)
7. T. Ando, *On the predual of H^∞*, Comment. Math. Special Issue **1** (1978), 33–40, Special issue dedicated to Władysław Orlicz on the occasion of his seventy-fifth birthday. MR MR504151 (80c:46063)
8. Errett Bishop, *Spectral theory for operators on a Banach space*, Trans. Amer. Math. Soc. **86** (1957), 414–445. MR MR0100789 (20 #7217)
9. Albrecht Böttcher and Bernd Silbermann, *Introduction to large truncated Toeplitz matrices*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 1999. MR MR1724795 (2001b:47043)
10. ———, *Analysis of Toeplitz operators*, second ed., Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2006, Prepared jointly with Alexei Karlovich. MR MR2223704 (2007k:47001)
11. Lennart Carleson, *Interpolations by bounded analytic functions and the corona problem*, Ann. of Math. (2) **76** (1962), 547–559. MR MR0141789 (25 #5186)
12. ———, *The corona theorem*, Proceedings of the Fifteenth Scandinavian Congress (Oslo, 1968), Lecture Notes in Mathematics, Vol. 118 (Berlin), Springer, 1970, pp. 121–132. MR MR0264100 (41 #8696)
13. Ion Colojoară and Ciprian Foiaş, *Theory of generalized spectral operators*, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1968, Mathematics and its Applications, Vol. 9. MR MR0394282 (52 #15085)
14. John Dauns and Karl Heinrich Hofmann, *Representation of rings by sections*, Memoirs of the American Mathematical Society, No. 83, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1968. MR MR0247487 (40 #752)
15. Jacques Dixmier, *C^*-algebras*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1977, Translated from the French by Francis Jellett, North-Holland Mathematical Library, Vol. 15. MR MR0458185 (56 #16388)
16. ———, *von Neumann algebras*, North-Holland Mathematical Library, vol. 27, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1981, With a preface by E. C. Lance, Translated from the second French edition by F. Jellett. MR MR641217 (83a:46004)
17. Ronald G. Douglas, *Banach algebra techniques in operator theory*, Academic Press, New York, 1972, Pure and Applied Mathematics, Vol. 49. MR MR0361893 (50 #14335)
18. ———, *Banach algebra techniques in the theory of Toeplitz operators*, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1973, Expository Lectures from the CBMS Regional Conference held at the University of Georgia, Athens, Ga., June 12–16, 1972, Conference Board of the Mathematical Sciences Regional Conference Series in Mathematics, No. 15. MR MR0361894 (50 #14336)
19. ———, *Local Toeplitz operators*, Proc. London Math. Soc. (3) **36** (1978), no. 2, 243–272. MR MR0482348 (58 #2421)
20. Peter L. Duren, *Theory of H^p spaces*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 38, Academic Press, New York, 1970. MR MR0268655 (42 #3552)
21. Jörg Eschmeier and Mihai Putinar, *Spectral decompositions and analytic sheaves*, London Mathematical Society Monographs. New Series, vol. 10, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1996, Oxford Science Publications. MR MR1420618 (98h:47002)

22. Ciprian Foiaş, *Spectral maximal spaces and decomposable operators in Banach space*, Arch. Math. **14** (1963), 341–349. MR MR0152893 (27 #2865)
23. T. W. Gamelin, *Wolff's proof of the corona theorem*, Israel J. Math. **37** (1980), no. 1-2, 113–119. MR MR599306 (82a:30042)
24. John B. Garnett, *Bounded analytic functions*, first ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 236, Springer, New York, 2007. MR MR2261424 (2007e:30049)
25. Israel Gohberg and Naum Krupnik, *On a local principle and algebras generated by Toeplitz matrices*, An. Şti. Univ. "Al. I. Cuza" Iaşi Secţ. I a Mat. (N.S.) **19** (1973), 43–71. MR MR0399923 (53 #3763b)
26. ______, *Vvedenie v teoriyu odnomernykh singulyarnykh integralnykh operatorov*, Izdat. "Štiinca", Kishinev, 1973. MR MR0405177 (53 #8971)
27. ______, *One-dimensional linear singular integral equations. I*, Operator Theory: Advances and Applications, vol. 53, Birkhäuser Verlag, Basel, 1992, Introduction, Translated from the 1979 German translation by Bernd Luderer and Steffen Roch and revised by the authors. MR MR1138208 (93c:47061)
28. ______, *One-dimensional linear singular integral equations. Vol. II*, Operator Theory: Advances and Applications, vol. 54, Birkhäuser Verlag, Basel, 1992, General theory and applications, Translated from the 1979 German translation by S. Roch and revised by the authors. MR MR1182987 (93k:47059)
29. Roland Hagen, Steffen Roch, and Bernd Silbermann, *C^*-algebras and numerical analysis*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol. 236, Marcel Dekker Inc., New York, 2001. MR MR1792428 (2002g:46133)
30. Peter Henrici, *Applied and computational complex analysis*, Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1974, Volume 1: Power series—integration—conformal mapping—location of zeros, Pure and Applied Mathematics. MR MR0372162 (51 #8378)
31. Yitzhak Katznelson, *An introduction to harmonic analysis*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1968. MR MR0248482 (40 #1734)
32. Paul Koosis, *Introduction to H_p spaces*, second ed., Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 115, Cambridge University Press, Cambridge, 1998, With two appendices by V. P. Havin [Viktor Petrovich Khavin]. MR MR1669574 (2000b:30052)
33. A. V. Kozak, *A local principle in the theory of projection methods*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **212** (1973), 1287–1289. MR MR0374948 (51 #11144)
34. Ridgley Lange, *On generalization of decomposability*, Glasgow Math. J. **22** (1981), no. 1, 77–81. MR MR604819 (82j:47054)
35. Kjeld B. Laursen and Michael M. Neumann, *An introduction to local spectral theory*, London Mathematical Society Monographs. New Series, vol. 20, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 2000. MR MR1747914 (2001k:47002)
36. Bela Nagy, *A spectral residuum for each closed operator*, Topics in modern operator theory (Timişoara/Herculane, 1980), Operator Theory: Adv. Appl., vol. 2, Birkhäuser, Basel, 1981, pp. 221–238. MR MR672824 (84a:47040)
37. Gert K. Pedersen, *C^*-algebras and their automorphism groups*, London Mathematical Society Monographs, vol. 14, Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], London, 1979. MR MR548006 (81e:46037)
38. Ernst Peschl, *Funktionentheorie*, second ed., Bibliographisches Institut, Mannheim, 1983. MR MR753289 (86b:30003)
39. Walter Rudin, *Real and complex analysis*, third ed., McGraw-Hill Book Co., New York, 1987. MR MR924157 (88k:00002)
40. Shôichirô Sakai, *C^*-algebras and W^*-algebras*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1998, Reprint of the 1971 edition. MR MR1490835 (98k:46085)
41. I. B. Simonenko, *A new general method of studying linear operator equations of a type of singular integral equations*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **158** (1964), 790–793. MR MR0180869 (31 #5099)
42. ______, *A new general method of investigating linear operator equations of singular integral equation type. I*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **29** (1965), 567–586. MR MR0179630 (31 #3876)
43. ______, *A new general method of investigating linear operator equations of singular integral equation type. II*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **29** (1965), 757–782. MR MR0188738 (32 #6174)
44. Florian-Horia Vasilescu, *Analytic functional calculus and spectral decompositions*, Mathematics and its Applications (East European Series), vol. 1, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1982, Translated from the Romanian. MR MR690957 (85b:47016)
45. Wolfgang Walter, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, fifth ed., Springer-Lehrbuch. [Springer Textbook], Springer-Verlag, Berlin, 1993, Eine Einführung. [An introduction]. MR MR1231977

Index