

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

6. Übung

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Für eine Partei ist bekannt, dass sie in der Wählergunst zwischen 25% und 35% liegt. Die Parteichefin will bei der anstehenden Wahl nur dann als Spitzenkandidatin antreten, wenn ihre Partei mit mindestens 30% der Stimmen (aller Wahlberechtigten) rechnen kann. Um genauer zu ermitteln, wie populär ihre Partei ist, lässt sie eine Umfrage durchführen, bei der eine repräsentative Auswahl an Personen nach ihrem voraussichtlichen Abstimmungsverhalten gefragt wird. Von Interesse ist dabei, wie groß die Anzahl n_0 der Teilnehmer an der Umfrage mindestens sein muss, damit die relative Häufigkeit an Stimmen für die Partei bei der Umfrage mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% um weniger als 1% von der Wählergunst abweicht.

- Bestimmen Sie unter Benutzung der Tschebyscheff-Markov-Ungleichung eine möglichst kleine obere Schranke für n_0 .
- Bestimmen Sie n_0 approximativ mit dem zentralen Grenzwertsatz.

Hinweis: Tabellen mit den Werten der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung findet man in vielen Lehrbüchern zur Wahrscheinlichkeitstheorie, z.B. in der zu diesem Kurs angegebenen Literatur.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Zu *Beispiel 5.9*. Sei f_{μ,σ^2} die Dichte der Normalverteilung mit Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 > 0$ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Zeigen Sie, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{\mu,\sigma^2}(x) dx = 1.$$

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Sei $\Omega := \mathbb{N}$ und $\mathcal{A}_1 := \mathcal{A}(\{\{n\} \subset \Omega : n \text{ ist Primzahl}\})$. Bestimmen Sie eine σ -Algebra $\mathcal{A}_2 \subset 2^\Omega$ derart, dass $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ keine σ -Algebra ist und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Borelsche σ -Algebra auf \mathbb{R} äquivalent ist zu

- $\mathcal{A}(\{(a, b) \subset \mathbb{R} : a \leq b\})$,
- $\mathcal{A}(\{[a, b] \subset \mathbb{R} : a \leq b\})$,
- $\mathcal{A}(\{[a, b) \subset \mathbb{R} : a \leq b\})$.